

Universidade Federal Fluminense - GMA
VE2 - Cálculo 2B - Turma F1 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: _____ Data: 04 de Dezembro de 2018

Questão 1 (20 pts). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por :

$$f(x, y) = \text{sen}(x^2 y) - y^3.$$

- (a) (5 pts) Calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1)$ no ponto $(1, 1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- (b) (8 pts) Escreva o polinômio de Taylor de grau 9 centrado no ponto $(0, 0)$ da função f .
- (c) (7 pts) Calcule $\frac{\partial^9 f}{\partial x^6 \partial y^3}(0, 0)$ (dica: você pode usar o polinômio obtido no item (b)).

Questão 2 (25 pts + 5 bônus). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por:

$$f(x, y) = xy.$$

Considere o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$.

- (a) (5 bônus) Esboce o conjunto C .
- (b) (10 pts) A função f possui máximo e mínimo no conjunto C ? Justifique.
- (c) (15 pts) Encontre todos os pontos de máximos e mínimos globais da função f no conjunto C .

Questão 3 (20 pts). Considere a composição das três funções seguintes. A primeira função é uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (\cos(3t), \text{sen } t, t).$$

A segunda função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que as matrizes Jacobianas nos pontos $(0, \frac{1}{2}, 1)$ e $(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3})$ são respectivamente:

$$DF\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad DF\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A terceira função é uma projeção $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no plano yz , em outras palavras, $P(x, y, z) = (y, z)$. Calcule a matriz Jacobiana da composição $G = (P \circ F \circ \gamma) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no ponto $t = 1$, isto é:

$$\frac{dG}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(P \circ F \circ \gamma)(1) = ?$$

Questão 4 (15 pts). Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela equação:

$$F(a, r) = (x(a, r), y(a, r)) = (a \sinh r, a \cosh r).$$

- (a) (10 pts) Encontre todos os pontos $(a_0, r_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função F possui uma inversa local.
- (b) (5 pts) Calcule a matriz Jacobiana $\frac{\partial F^{-1}}{\partial(x, y)}(0, a)$ da função inversa no ponto $F(a, r) = (0, a)$.

Questão 5 (20 pts). Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela expressão:

$$F(\rho, \theta, \phi) = (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi)) = (\cos \theta \text{sen } \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi).$$

- (a) (15 pts) Determine todos os pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ tais que a relação:

$$F(\rho, \theta, \phi) - (x_0, y_0) = (0, 0), \quad \text{com } (x_0, y_0) = F(\rho_0, \theta_0, \phi_0).$$

define, a priori, (θ, ϕ) como funções de ρ numa vizinhança do ponto ρ_0 .

- (b) (5 pts) Calcule a derivada $\frac{d(\theta, \phi)}{d\rho}\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

Boa Prova!