

Universidade Federal Fluminense - GMA
VE1 - Cálculo 2B - Turma C1+C2 - Prof. Zhou Cong

04 de Outubro de 2018

Nome Completo: _____

Instruções:

1. Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos, consulta ou comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador da prova. O não cumprimento dessas regras resultará no anulamento da prova. **(Desligue o celular e coloque-lo na mochila!)**
2. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos corretos e necessários não serão consideradas na correção. Enumerem as páginas e escrevam o nome na folha da prova.
3. Durante a prova é proibido sair da sala e o consumo de comidas.
4. A duração da prova é de **1 hora e 40 minutos**, a prova só pode ser entregue após 40min do início.
5. As dicas e as sugestões são somente para ajudar na resolução da questão, elas não substituem os passos na resolução da questão. Você precisa argumentar e escrever na prova o seu raciocínio mostrando que entendeu a matéria.

Questão 1 (1,6 pts). Descreva e esboce o maior domínio possível para que as expressões abaixo tornem funções:

(a) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - y^2 - 1)}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$. (b) $g(x, y) = \arcsen\left(\frac{x^2 - y^2 - 17}{8}\right)$.

Dica para o item (b): O domínio da função \arcsen é o intervalo $[-1, 1]$.

Questão 2 (1,0 pts). Verifique a existência do limite abaixo. Se existir, encontre o valor do limite:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,3)} \frac{\sen^2(xyz - 6x)}{x^2(yz - 6)^2}.$$

Dica: Encontre as funções $f : D_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a expressão acima dentro limite fica na forma $f(g(x, y, z))$. Obtenha o valor $u_0 := \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,3)} g(x, y, z)$ e use a propriedade de que:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,3)} f(g(x, y, z)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$

para verificar a existência do limite acima e encontrar o seu valor.

Questão 3 (3,0 pts). Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x)y}{x^2 + y^2} + (x + 1)^2(y + 1), & (x, y) \neq (0, 0). \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) (1,0 ponto) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0, 0)$.
- (b) (1,0 ponto) Calcule o vetor gradiente $\nabla f(0, 0)$ da função f no ponto $(0, 0)$.
- (c) (1,0 ponto) Mostrar que f não é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

Sugestão: Para não complicar as contas, separe a função f em soma de duas funções $f = f_1 + f_2$, com:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x)y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

No item (a) mostre que f_1 e f_2 são contínuas em $(0,0)$. No item (b), calcule $\nabla f_1(0,0)$ e $\nabla f_2(0,0)$, use a propriedade $\nabla f_1 + \nabla f_2 = \nabla f$.

Dica para o item (a): Separe a função $f_1 = g_1 \cdot g_2$ num produto de funções. Mostre que g_1 é uma função limitada e mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_2(x,y) = 0$. Depois aplique o Teorema de Anulamento.

Dica para o item (c): Tente mostrar que f_1 não é diferenciável em $(0,0)$.

Questão 4 (2,4 pts + 1,5 bônus). Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2(x^2 + y^2)z}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0). \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

(a) Escolha **somente um** dos itens (a1) ou (a2) abaixo para fazer:

(a1) (1,6 pts). Determine e esboce o conjunto de nível 1 e 0 da função f .

(a2) (1,6 pts + 1,0 bônus). Determine a expressão geral de um conjunto de nível k da função f e esboce esses conjuntos. Separe nos casos $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

(b) (0,8 pts) Prove que a função f não é contínua no ponto $(0,0,0)$.

(c) (0,5 bônus) Encontre uma curva $\gamma(t)$ com $\gamma(0) = (0,0,0)$ e satisfazendo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 1.$$

Dica para os itens (a1) e (a2): Para encontrar o conjunto de nível k , resolva a equação $f(x, y, z) = k$ (vai dar uma equação de segundo grau com relação ao variável z). Isole o z nessa equação para obter a definição explícita do conjunto de nível $k \neq 0$. Estude o caso $k = 0$ separadamente.

Dica para o item (b): Use o item (a1) ou (a2), observe por onde o conjunto de nível está passando, use isso para mostrar que f não tem limite no ponto $(0,0,0)$.

Questão 5 (2,0 pts + 1,0 bônus). Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$H(r, \theta) = F(x(r, \theta), y(r, \theta)),$$

onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua de duas variáveis e

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y(r, \theta) = r \sin \theta.$$

Sabendo que:

$$\nabla F(1, \sqrt{3}) = (4, 6), \quad \nabla F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (8, 10), \quad \nabla F(-1, \sqrt{3}) = (-2, -2).$$

(a) (1,0 pts) Calcule o vetor gradiente $\nabla H(r, \theta)$ da função H no ponto $(2, \frac{2\pi}{3})$ e escreva a expressão matricial da transformação linear que define a derivada $H'(2, \frac{2\pi}{3})$ nesse ponto.

(b) (0,5 pts) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico da função H no ponto $(2, \frac{2\pi}{3}, H(2, \frac{2\pi}{3}))$, sabendo que $H(2, \frac{2\pi}{3}) = 1$.

(c) (0,5 pts) Use a derivada definido no item (a) para estimar o valor de $H(2.002, 2.095)$.

(d) (1,0 bônus) Sabendo que:

$$F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$$

para qualquer $(x, y) \in \{(1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$. Calcule o valor de $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial r}(2, \frac{2\pi}{3})$.

Dica para os itens (a) e (d): Usar a Regra da Cadeia, substituir os valores das derivadas de acordo com os dados acima e calcular os valores pedidos. Se você substituiu os valores e aplicou as fórmulas corretamente, o restante é uma conta direta.

Dica para o item (c): Observe que $\frac{2\pi}{3} \approx 2.095$.

Boa Prova!