

Nome Completo: _____ Data: 06 de Dezembro de 2018

Questão 1 (20 pts). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por :

$$f(x, y) = \cos(xy^2\pi) - y^7.$$

- (a) (5 pts) Calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1)$ no ponto $(1, 1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- (b) (8 pts) Escreva o polinômio de Taylor de grau 6 centrado no ponto $(0, 0)$ da função f .
- (c) (7 pts) Calcule $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0, 0)$ (dica: você pode usar o polinômio obtido no item (b)).

Questão 2 (25 pts). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por:

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Considere o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

- (a) (5 pts) A função f possui máximo e mínimo no conjunto C ? Justifique.
- (b) (20 pts) Encontre todos os pontos de máximos e mínimos globais da função f no conjunto C .

Questão 3 (20 pts). Considere a composição das três funções seguintes. A primeira função é uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (\cos(t\pi), \sin(t\pi), t\pi).$$

A segunda função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que as matrizes Jacobianas nos pontos $(0, -\pi, \pi)$ e $(-1, 0, \pi)$ são respectivamente:

$$DF(0, -\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad DF(-1, 0, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A terceira função é $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no plano yz dada por:

$$P(x, y, z) = (y + 1, z + 2, 3 - x).$$

Calcule a matriz Jacobiana da composição $G = (P \circ F \circ \gamma) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no ponto $t = 1$, isto é:

$$\frac{dG}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(P \circ F \circ \gamma)(1) = ?$$

Questão 4 (15 pts). Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela equação:

$$F(a, r) = (x(a, r), y(a, r)) = (a \sinh r, a \cosh r).$$

- (a) (10 pts) Encontre todos os pontos $(a_0, r_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função F possui uma inversa local.
- (b) (5 pts) Calcule a matriz Jacobiana $\frac{\partial F^{-1}}{\partial (x, y)}(0, a)$ da função inversa no ponto $(x, y) = (0, a)$.

Dica: Por definição $\sinh r = \frac{e^r - e^{-r}}{2}$, $\cosh r = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$. Você pode usar as propriedades: $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$, $\cosh' r = \sinh r$ e $\sinh' r = \cosh r$.

Questão 5 (20 pts). Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela expressão:

$$F(\rho, \theta, \phi) = (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi)) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi).$$

- (a) (15 pts) Determine todos os pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ tais que a relação:

$$F(\rho, \theta, \phi) = (x_0, y_0), \quad \text{com} \quad (x_0, y_0) = F(\rho_0, \theta_0, \phi_0).$$

define, a priori, (θ, ϕ) como funções de ρ numa vizinhança do ponto ρ_0 .

- (b) (5 pts) Calcule a derivada $\frac{d(\theta, \phi)}{d\rho}(1)$ da função obtida no item (a) para $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Boa Prova!