

Universidade Federal Fluminense - GMA  
Reposição de VE1 - Cálculo 2B - Turma C1+C2 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: \_\_\_\_\_ Data: 06 de Dezembro de 2018

**Questão 1** (15 pts). Descreva e esboce o maior domínio possível para que a expressão abaixo torne função:

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 2xy + y^2 - 1) - \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 - 1}.$$

**Questão 2** (15 pts). Verifique a existência do limite abaixo. Se existir, encontre o valor do limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} \frac{\tan(y + e^x - 1) - 1}{1 + \frac{\pi}{4} - y - e^x}.$$

**Dica:** Encontre as funções  $f : D_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que a expressão acima dentro limite fica na forma  $f(g(x, y))$ . Obtenha o valor  $u_0 := \lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} g(x, y)$  e use a propriedade de que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} f(g(x, y)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$

para verificar a existência do limite acima e encontrar o seu valor. Provavelmente você também vai precisar aplicar L'Hôpital e usar  $\frac{d}{dt}(\tan(t)) = \frac{1}{\cos^2 t}$ .

**Questão 3** (30 pts). Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^x - x - 1)y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (14 pts) Mostre que a função  $f$  é contínua no ponto  $(0, 0)$ .

**Dica:** Use a expansão de Taylor  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  onde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$  e aplique o Teorema de Anulamento corretamente mostrando qual parte da expressão é limitada e qual parte vai para zero.

(b) (6 pts) Calcule o vetor gradiente  $\nabla f(0, 0)$  da função  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

(c) (10 pts) Mostrar que  $f$  não é diferenciável no ponto  $(0, 0)$ .

**Questão 4** (20 pts). Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela equação:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6xy^2}{x^2 + 9y^4}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (15 pts) Encontre a expressão  $x = g(y)$  de um conjunto de nível  $k$  da função  $f$  (Dica: você tem que resolver uma equação de segundo grau isolando o variável  $x$ ).

(b) (5 pts) Prove que a função  $f$  não é contínua no ponto  $(0, 0)$ .

**Questão 5** (20 pts). Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela expressão:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (10 pts) Prove que a função  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ . (Dica: Note que  $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$  para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , use o Teorema de Sanduíche corretamente justificando cada passo do seu argumento).

(b) (10 pts) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(0, 2, f(0, 2))$ .

*Boa Prova!*