Universidade Federal Fluminense - GMA

Gabarito resumido do Teste - Cálculo 2B - Prof. Zhou Cong

30 de Outubro de 2018

Existem três variações do teste. Os itens de cada variação são idênticas, a única diferença na questão encontra-se na definição da função f:

Questão 1 (2,5 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{\frac{xy}{2}} \qquad f(x,y) = (4x^2+y^2)e^{\frac{xy}{2}} \qquad f(x,y) = (x^2+9y^2)e^{\frac{xy}{3}}.$$

(a) (0,6 pts) Encontre os pontos críticos da função f.

(b) (0,6 pts) Obter a **Matriz Hessiana** da função f nos pontos críticos da função obtidos no item (a).

(c) (0,8 pts) Escreva o polinômio de Taylor de grau 2 da função f nos pontos críticos obtidos no item (a).

(d) (0,5 pts) Determine e **justifique** se esses pontos são de máximo local, de mínimo local ou de sela.

Variação 1:

$$f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{\frac{xy}{2}}.$$

As derivadas parciais de ordem 1 da função são:

$$f_x(x,y) = \left(2x + (x^2+4y^2)\frac{y}{2}\right)e^{\frac{xy}{2}} \qquad f_y(x,y) = \left(8x + (x^2+4y^2)\frac{x}{2}\right)e^{\frac{xy}{2}}.$$

Derivamos novamente para encontrar as derivadas parciais de ordem 2, que são:

$$f_{xx}(x,y) = \left(2 + 2xy + (x^2+4y^2)\frac{y^2}{4}\right)e^{\frac{xy}{2}}$$

$$f_{yy}(x,y) = \left(8 + 8xy + (x^2+4y^2)\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{xy}{2}}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \left(\frac{3}{2}x^2 + 6y^2 + (x^2+4y^2)\frac{xy}{4}\right)e^{\frac{xy}{2}}$$

(a) Os pontos críticos são $(0,0)$, $(2,-1)$ e $(-2,1)$. Para provar isso resolveremos o sistema:

$$\left(2x + (x^2+4y^2)\frac{y}{2}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\left(8x + (x^2+4y^2)\frac{x}{2}\right) = 0 \tag{2}$$

Multiplicarmos a equação (5) por x, a equação (6) por y e substrairmos a primeira equação pela segunda equação obtemos:

$$2x^2 - 8y^2 = 0.$$

Isto implica que $x = 2y$ ou $x = -2y$. Fazendo $x = 2y$ na equação (5) obtemos como solução o ponto $(0,0)$. Fazendo $x = -2y$ na equação (5) obtemos como solução os pontos $(0,0), (2,-1)$ e $(-2,1)$.

(b) As matrizes Hessianas nos pontos do item (a) são, respectivamente (é uma conta direta):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{e} \\ \frac{8}{e} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{e} \\ \frac{8}{e} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Os polinômios de Taylor nos pontos do item (a) são, respectivamente:

$$P_{(0,0)}(x,y) = x^2 + 4y^2 \qquad P_{(2,-1)}(x,y) = \frac{8}{e} + \frac{8}{e}(x-2)(y+1) \qquad P_{(-2,1)}(x,y) = \frac{8}{e} + \frac{8}{e}(x+2)(y-1).$$

(d) O ponto $(0,0)$ é mínimo local pois os seus autovalores são 2 e 8 que são positivos. Os pontos $(2,-1)$ e $(-2,1)$ são de sela pois o determinante da matriz Hessiana é $-\frac{64}{e^2} < 0$ é negativo.

Variação 2:

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{\frac{xy}{2}}.$$

As derivadas parciais de ordem 1 da função são:

$$f_x(x,y) = \left(8x + (4x^2+y^2)\frac{y}{2}\right)e^{\frac{xy}{2}} \qquad f_y(x,y) = \left(2x + (4x^2+y^2)\frac{x}{2}\right)e^{\frac{xy}{2}}.$$

Derivamos novamente para encontrar as derivadas parciais de ordem 2, que são:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \left(8 + 8xy + (4x^2+y^2)\frac{y^2}{4}\right)e^{\frac{xy}{2}} \\ f_{yy}(x,y) &= \left(2 + 2xy + (4x^2+y^2)\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{xy}{2}} \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \left(6x^2 + \frac{3}{2}y^2 + (4x^2+y^2)\frac{xy}{4}\right)e^{\frac{xy}{2}} \end{aligned}$$

(a) Os pontos críticos são $(0,0)$, $(2,-1)$ e $(-2,1)$. Para provar isso resolveremos o sistema:

$$\left(8x + (4x^2+y^2)\frac{y}{2}\right) = 0 \tag{3}$$
$$\left(2x + (4x^2+y^2)\frac{x}{2}\right) = 0 \tag{4}$$

Multiplicarmos a equação (5) por x, a equação (6) por y e substrairmos a primeira equação pela segunda equação obtemos:

$$8x^2 - 2y^2 = 0.$$

Isto implica que $y = 2x$ ou $y = -2x$. Fazendo $y = 2x$ na equação (5) obtemos como solução o ponto $(0,0)$. Fazendo $y = -2x$ na equação (5) obtemos como solução os pontos $(0,0), (-1,2)$ e $(1,-2)$.

(b) As matrizes Hessianas nos pontos do item (a) são, respectivamente (é uma conta direta):

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{e} \\ \frac{8}{e} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{e} \\ \frac{8}{e} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Os polinômios de Taylor nos pontos do item (a) são, respectivamente:

$$P_{(0,0)}(x,y) = 4x^2 + y^2 \qquad P_{(-1,2)}(x,y) = \frac{8}{e} + \frac{8}{e}(x+1)(y-2) \qquad P_{(1,-2)}(x,y) = \frac{8}{e} + \frac{8}{e}(x+1)(y-2).$$

(d) O ponto $(0,0)$ é mínimo local pois os seus autovalores são 8 e 2 que são positivos. Os pontos $(1,-2)$ e $(-1,2)$ são de sela pois o determinante da matriz Hessiana é $-\frac{64}{e^2} < 0$ é negativo.

Variação 3:

$$f(x,y) = (x^2 + 9y^2)e^{\frac{xy}{3}}.$$

As derivadas parciais de ordem 1 da função são:

$$f_x(x,y) = \left(2x + (x^2+9y^2)\frac{y}{3}\right)e^{\frac{xy}{3}} \qquad f_y(x,y) = \left(18x + (x^2+9y^2)\frac{x}{3}\right)e^{\frac{xy}{3}}.$$

Derivamos novamente para encontrar as derivadas parciais de ordem 2, que são:

$$f_{xx}(x,y) = \left(2 + \frac{4}{3}xy + (x^2+9y^2)\frac{y^2}{9}\right) e^{\frac{xy}{3}}$$
$$f_{yy}(x,y) = \left(18 + 12xy + (x^2+9y^2)\frac{x^2}{9}\right) e^{\frac{xy}{3}}$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \left(x^2 + 9y^2 + (x^2+9y^2)\frac{xy}{9}\right) e^{\frac{xy}{3}}$$

(a) Os pontos críticos são $(0,0)$, $(3,-1)$ e $(-3,1)$. Para provar isso resolveremos o sistema:

$$\left(2x + (x^2+9y^2)\frac{y}{3}\right) = 0 \tag{5}$$
$$\left(18x + (x^2+9y^2)\frac{x}{3}\right) = 0 \tag{6}$$

Multiplicarmos a equação (5) por x, a equação (6) por y e substrairmos a primeira equação pela segunda equação obtemos:

$$2x^2 - 18y^2 = 0.$$

Isto implica que $x = 3y$ ou $x = -3y$. Fazendo $x = 3y$ na equação (5) obtemos como solução o ponto $(0,0)$. Fazendo $x = -3y$ na equação (5) obtemos como solução os pontos $(0,0), (3,-1)$ e $(-3,1)$.

(b) As matrizes Hessianas nos pontos do item (a) são, respectivamente (é uma conta direta):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{12}{e} \\ \frac{12}{e} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{12}{e} \\ \frac{12}{e} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Os polinômios de Taylor nos pontos do item (a) são, respectivamente:

$$P_{(0,0)}(x,y) = x^2+9y^2 \qquad P_{(3,-1)}(x,y) = \frac{18}{e}+\frac{12}{e}(x-3)(y+1) \qquad P_{(-3,1)}(x,y) = \frac{18}{e}+\frac{12}{e}(x+3)(y-1).$$

(d) O ponto $(0,0)$ é mínimo local pois os seus autovalores são 2 e 18 que são positivos. Os pontos $(3,-1)$ e $(-3,1)$ são de sela pois o determinante da matriz Hessiana é $-\frac{144}{e^2} < 0$ é negativo.