Universidade Federal Fluminense - GMA

Exercícios - Cálculo 2B - Turma E1 e I1 - Prof. Zhou Cong

Caro(a) Aluno(a), para aumentar a nota de VE1 você pode optar fazer os exercícios abaixo ou optar por ser avaliado(a) através das listas **1, 2, 3, 6 e 7** de GMA.

Qualquer dúvida com relação à resolução dos exercícios pode (e aconselho) consultar as notas, o livro, a internet, o professor, os monitores e os colegas.

Questão 1. Descreva e esboce o maior domínio possível para que a expressão abaixo torne função:

$$f(x, y, z) = \sqrt{4xy - z^2 - 1}.$$

Qual é a cônica que define a fronteira desse domínio? Justifique.

Questão 2. Considere o cilíndro gerado pela rotação da reta $\gamma(t) = (t, 0, 1)$ ao redor do eixo x. Seja C o conjunto formado pela intersecção desse cilíndro com o semi-espaço $z \geqslant 0$. Defina três funções $F : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $G : D_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ e $H : D_3 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que:

$$C = \mathrm{Gr}(F) = C_0(G) = \mathrm{Im}(H),$$

e explicite a **expressão** e o **domínio** dessas funções.

Notações: $Gr(F)$ é o gráfico de F, $C_0(G)$ é o conjunto de nível 0 de G e $Im(H)$ é a imagem de H.

Questão 3. Considere as funções $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com:

$$u(x, y) = x^2 + y - 1, \quad v(x, y) = x + y, \quad w(t) = t^3 \quad \text{e} \quad \gamma(y) = e^y - 1.$$

Além disso, $F(1, 0, 0) = F(0, 1, 0) = 3$, $\nabla F(1, 0, 0) = (-1, -1, -1)$ e $\nabla F(0, 1, 0) = (2, 2, 2)$. Seja:

$$H(x, y) = F\big(u(x, y), v(x, y), w(\gamma(y))\big).$$

(a) Encontre o gradiente $\nabla H(1, 0)$.

(b) Suponha que H é diferenciável, encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função H no ponto $(1, 0, 3)$.

Questão 4. Defina uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que possui as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ no ponto $(0, 0)$, mas que **não** é contínua em $(0, 0)$.

Questão 5. Construa uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em todos pontos porém que **não** seja de classe C^1 e mostre isto para a função construída.

Questão 6. Para as funções **reais** diferenciáveis de uma variável real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vale o Teorema do Valor Médio, ou seja, existe um $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a). \tag{1}$$

Porém este Teorema deixa de valer para as funções **vetoriais** de uma variável real. Dê um exemplo de uma função vetorial diferenciável $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ que não satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio para F, isto é, que não vale a Equação (1) para qualquer $c \in (a, b)$.

Questão 7. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t, -t)$, escolha um ponto que pertence à imagem desta curva e escreva uma parametrização da reta tangente à curva no ponto escolhido.

Questão 8. Encontre alguns valores $j, k \in \mathbb{R}$ para que a expressão abaixo f seja uma função diferenciável no ponto $(0, 0)$, e mostre que para os valores encontrados da função é diferenciável em todo ponto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(\ln|x|)^j(\cos y - 1)^k}{x^2+y^6}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Questão 9. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada pela equação $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, encontre todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que o plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(x,y,f(x,y))$ é paralelo ao plano $x+y+z = 10$.

Questão 10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, & x \geqslant y \text{ e } (x,y) \neq (0,0), \\ \dfrac{\cos(x-y)-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, & x < y, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Mostre que a função f é contínua no ponto (a,a) para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(b) Usando a definição, calcule, caso existir, as derivadas parciais da função f no ponto (a,a) com $a \in \mathbb{R}$.

(c) A função f é diferenciável no ponto (a,a) com $a \in \mathbb{R}$? Justifique a resposta demonstrando a diferenciabilidade ou o contrário.

Dica: Esta função está definida com fórmulas diferentes nos seguintes três conjuntos:

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant y \text{ e } (x,y) \neq 0\}, \quad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\} \quad \text{e} \quad C_3 = \{(0,0)\}.$$

Esboçe esses conjuntos, note que o ponto (a,a) é um ponto de acumulação dos conjuntos C_1 e C_2. Então para verificar a continuidade e existência e o valor das derivadas parciais de f é preciso fazer duas contas: a primeira para a fórmula da função f no conjunto C_1 e a segunda para a fórmula da função f no C_2.
No item (b), ao verificar a existência e para encontrar o valor das derivadas parciais você provavelmente vai precisar usar limites laterais ($\lim_{t\to 0^-}$ e $\lim_{t\to 0^+}$). Ao fazer as contas, encontrará dentro desses limites uma expressão contendo algum termo da forma $\sqrt{t^2} = |t|$, lembre-se em usar a definição da norma, que é: $|t| = -t$ se $t < 0$ e $|t| = t$ se $t \geqslant 0$.