uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 10 - 2012-1**
Função vetorial de várias variáveis.
Matriz jacobiana. Aproximação afim.
Regra da cadeia.

Em cada exercício de 1. a 6. fazer o seguinte:
(i) calcular a derivada (matriz jacobiana) da função no ponto $X_0$ indicado;
(ii) se possível, calcular o jacobiano (determinante da matriz jacobiana) da função no mesmo ponto;
(iii) encontrar a diferencial $d_{X_0}f$ em $X - X_0$;
(iv) determinar a função afim $A(X)$ que melhor aproxima a função $f$ dada em $X$ perto de $X_0$.

1. $f(X) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{y + x^2}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $f(X) = f(u, v) = (u \cos 2v, u \operatorname{sen} 2v)$ em $X_0 = (u_0, v_0) = (2, \pi/2)$

3. $f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ em qualquer $X_0 = (x_1^0, x_2^0)$

4. $f(X) = f(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$ em $X_0 = t_0 = 0$

5. $f(X) = f(x, y, z) = (x^2 - y^2, x^2 + z^2, x + y - z)$ em $X_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$

6. $f(X) = f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)$ em $X_0 = (\rho_0, \theta_0, \phi_0) = (1, 3\pi/2, \pi/2)$

7. Usando uma função afim, calcule aproximadamente o vetor $\begin{pmatrix} \sqrt{16,02} - \sqrt[3]{0,97} \\ \sqrt[4]{16,02} - \sqrt{1,04} \\ \sqrt[5]{1,04} \end{pmatrix}$.

8. Considere $c \in \mathbb{R}$, $c$ constante, $a < t < b$ e as funções $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , $g : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Mostre que:

   (a) $(f + g)' = f' + g'$ e $(cf)' = cf'$
   (b) $(\phi f)' = \phi f' + \phi' f$
   (c) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$ (lembre que para quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^n$ podemos trocar a ordem no produto escalar).
   (d) para $n = 2$ ou 3, $(f \times g)' = f \times g' + f' \times g$ (lembre que não podemos trocar a ordem no produto vetorial de quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$)
   (e) para $f$ não nula, $f \cdot \dfrac{df}{dt} = \|f\| \dfrac{d\|f\|}{dt}$ (sugestão: use $\|f\| = \sqrt{f \cdot f}$ )
   (f) para $f$ não nula: $\|f\|$ é constante $\Leftrightarrow f \cdot f' = 0$

Nos exercícios 9. a 11. mostre que a função dada é diferenciável ou, se não for diferenciável, indique em que pontos não é diferenciável.

9. $f(x, y) = \left( \dfrac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, \dfrac{(x-1)^4}{(x-1)^2 + y^2} \right)$, se $(x, y) \neq (0, 0); (x, y) \neq (1, 0); (x, y) \neq (0, 1)$
   $f(0, 0) = (0, 0, 1)$; $f(1, 0) = (-1/2, 1, 0)$; $f(0, 1) = (0, 0, 1/2)$.

10. $f : R^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , $f(X) = \|X\|$

11. $f\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(r - t) \\ s/(r + t) \end{bmatrix}$

12. Sejam $X \in \mathbb{R}^n$, $A$ uma matriz $m \times n$ e $f$ a função linear $f(X) = AX$. Prove:

    $d_{X_0}f(X) = AX$ para todo $X_0$, isto é, a diferencial em todo ponto $X_0$ de uma função linear $f$ é a propria função linear $f$.

13. Sejam $F(x,y,z) = \left(3x^2 + yz, z + y^3\right)$ e $G(x,y) = \left(x^2 + y^2, xy, x^3, x + y^3\right)$.

    (a) Verifique que uma das compostas $F \circ G$ ou $G \circ F$ não está definida;

    (b) Determine $F'(x,y,z)$ e $G'(x,y)$;

    (c) Determine $(F \circ G)'(1,-1)$ ou $(G \circ F)'(1,-1,2)$, a que for possível.

14. Se a função $f$ aplicada em um vector não nulo $\vec{r} = X \in \mathbb{R}^n$ é uma função real do seu comprimento $r = \|\vec{r}\|$, isto é, $f(\vec{r}) = g(r)$ e se g é diferenciável,

    (a) mostre que $\nabla f(\vec{r}) = \dfrac{g'(r)}{r}\,\vec{r}$;

    (b) determine $\nabla f(\vec{r})$ quando (i) $g(r) = \dfrac{1}{r^3}$ (ii) $g(r) = \ln r$.

15. Seja $h(x,y,z) = g(y^2 + xz, \sqrt{xyz})$, onde g é uma função real diferenciável. Encontre $\nabla h(1,-1,-4)$ sabendo que $\nabla g(-3,2) = (1,3)$ e $\nabla g(1,3) = (-3,2)$.

16. Seja $f(u) = \left(u^2 + 1, \sqrt{u}\right)$, onde $u = g(x,y,z)$ é uma função real diferenciável, tal que $g(2,1,3) = 1$ e $\nabla g(2,1,3) = (5,3,-1)$. Se $F = f \circ g$, encontre $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2,1,3)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(2,1,3)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}(2,1,3)$.

RESPOSTAS DA LISTA 10 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. (i) $f'\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f\begin{pmatrix} x + 1/2 \\ y - 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2} - x + y$ (iv) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -x + y$

2. (i) $f'(2,\pi/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ (ii) $det(Jf(2,\pi/2)) = 4$ (iii) $d_{X_0}f(u-2, v-\pi/2) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 2\pi - 4v \end{bmatrix}$

   (iv) $A(u,v) = \begin{bmatrix} -u \\ 2\pi - 4v \end{bmatrix}$ ou $A(u,v) = (-u, 2\pi - 4v)$

3. (i) $f'\left(x_1^0, x_2^0\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ x_2^0 & x_1^0 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f\left(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_1^0 + x_2^0 \\ -x_1 + x_2 + x_1^0 - x_2^0 \\ x_2^0x_1 + x_1^0x_2 - 2x_1^0x_2^0 \end{bmatrix}$

   (iv) $A\left(x_1, x_2\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_2^0x_1 + x_1^0x_2 - x_1^0x_2^0 \end{bmatrix}$

4. (i) $f'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(t-0) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. (i) $f'(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $det(Jf(1,0,-1)) = 4$

   (iii) $d_{X_0}f(x-1, y, z-0) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2x - 2z - 4 \\ x + y - z - 2 \end{pmatrix}$ (iv) $A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 2x - 2z - 2 \\ x + y - z \end{pmatrix}$

6. (i) $f'(1, 3\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(\rho - 1, \theta - 3\pi/2, \phi - \phi) = \begin{pmatrix} \theta - 3\pi/2 \\ -\rho + 1 \end{pmatrix}$

   (iv) $A(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \theta - 3\pi/2 \\ -\rho \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3,0125 \\ 0,980625 \\ 1,008 \end{pmatrix}$

9. A primeira função coordenada de $f$ não é contínua em $(0,1)$ (prove isso calculando os limites pelos caminhos $(x,y) = (t,1), t \to 1$ e $(x,y) = (t,t+1), t \to 0$ ), logo a função $f$ não é contiuna em $(0,1)$. Aplicando a contra-recíproca do teorema "*função diferenciável em $X \Longrightarrow$ função contínua em $X$* " concluímos que a função $f$ não é diferenciável em $(0,1)$.

   A função $f$ não é diferenciável em $(0,0)$. Para provar isso, calcule as derivadas parciais em $(0,0)$ e verifique que o limite da definição de diferenciabilidade não existe.

   A função $f$ é diferenciável em $(1,0)$. Para provar isso, calcule as derivadas parciais em $(1,0)$ e verifique que o limite da definição de diferenciabilidade é o vetor $(0,0,0)$.

   A função $f$ é diferenciável nos pontos restantes. Para provar isso, calcule as derivadas parciais e verifique que todas são contínuas nesses pontos, daí aplique o teorema "*uma função é de classe $\mathcal{C}^1$ em $X$, isto é, tem todas as derivadas parciais contínuas em $X \Longrightarrow$ a função é diferenciável em $X$*".

10. $f$ não é diferenciável ponto $(0,0...,0)$. Para provar isso verifique que não existem as derivadas parciais em $(0,0...,0)$ e aplique a contra-recíproca do teorema "*uma função é diferenciável em $X \Longrightarrow$existem todas as derivadas parciais da função em $X$*".

11. $f$ é diferenciável pois é diferenciável em todos os pontos do domínio. Para provar isso verifique que $f$ é de classe $\mathcal{C}^1$ em todos os pontos do domínio. Observe que $(r,s,t); r = t$ ou $r = -t$ não estão no domínio.

13. (a) Apenas $(G \circ F)$ está definida pois a imagem de $F$ e o domínio de $G$ estão contidos no espaço de dimensão 2. A composta $(F \circ G)$ não está definida pois a imagem de $G$ e o domínio de $F$ estão contidos em espaços de dimensões diferentes, 4 e 3 respectivamente.

    (b) $F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & z & y \\ 0 & 3y^2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad G'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ 3x^2 & 0 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$

    (c) $G'(F(1,-1,2))\ .\ F'(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & -3 \\ 6 & 11 & 2 \end{pmatrix}$

14. **(b)** Quando $g(r) = \dfrac{1}{r^3}$, $\nabla f\,(\vec{r}) = \dfrac{-3}{r^5}\,\vec{r}$. Quando $g(r) = \ln r$, $\nabla f\,(\vec{r}) = \dfrac{1}{r^2}\,\vec{r}$

15. $(-1,-5,1/4)$

16. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = (10,5/2)$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(2,1,3) = (6,3/2)$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = (-2,-1/2)$