

uff Universidade Federal Fluminense
 EGM - Instituto de Matemática
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 8 - 2012-1
 Derivada direcional

1. Sendo $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ no ponto $(1, 2, 1)$ na direção do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
2. A temperatura do ar em pontos do espaço é dada pela função $T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$. Um mosquito localizado em $(1, 2, 1)$ deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção ele deve voar?
3. Em que direção se deve seguir, começando da origem, para obter a taxa mais rápida de decréscimo da função $f(x, y, z) = (2 - x - y)^2 + (3x + 2y - z + 1)^2$?
4. Suponha que a temperatura T num ponto $P(x, y, z)$ é dada por $T(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 4z^2$. Determine a taxa de variação de T no ponto $(1, -2, 1)$ na direção do vetor $4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Em que direção T cresce mais rapidamente nesse ponto? Qual a taxa máxima de crescimento?

Nos exercícios 5. e 6. considere $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário e calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.

$$5. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 6. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. Uma função de classe C^1 f tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção do vetor $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção do vetor $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule:
 - (a) $\nabla f(1, 1)$
 - (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde \vec{u} tem a direção do vetor $\vec{i} + \vec{j}$.
8. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy e um indivíduo que se encontra na posição $(3, 2)$ pretende dar um passeio.
 - (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deveria percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.
 - (b) Qual a direção que deveria tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
 - (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura T em $^\circ\text{C}$, de quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item (b)?
 - (d) De quanto decrescerá aproximadamente a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção \vec{j} ?
9. A temperatura de uma chapa é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2$ (x, y em cm e T em $^\circ\text{C}$). Calcule de quanto ela varia aproximadamente, se caminharmos 1 cm a partir do ponto $(3, 4)$ na direção do vetor que faz um ângulo θ com o semi-eixo x positivo, se: (a) $\theta = 30^\circ$; (b) $\theta = 210^\circ$?
10. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y^2$, na direção da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em $(3, 4)$, no mesmo ponto.
11. A temperatura de uma chapa plana é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2$. A partir do ponto $P(3, 4)$, determine:
 - (a) O gradiente da temperatura;
 - (b) A direção em que a temperatura cresce o mais rápido possível e qual a taxa de crescimento?
 - (c) A direção em que a temperatura decresce o mais rápido possível e qual a taxa de decréscimo?
 - (d) $D_{\vec{u}}T(3, 4) = \frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(3, 4)$, onde \vec{u} faz um ângulo de 30° com o gradiente de T em $(3, 4)$

12. Num balão a temperatura T em qualquer ponto P diferente do centro C é positiva e proporcional ao quadrado de sua distância ao centro C . Calcule a taxa de variação da temperatura em P seguindo um vetor unitário \vec{u} . Caracterize as taxas máxima, mínima e nula no ponto P .
13. A temperatura T numa câmara cresce com a altura. As isotermas são lâminas horizontais e o módulo do vetor gradiente em cada ponto (x, y, z) é diretamente proporcional à altura z do ponto. Determine a expressão de T em (x, y, z) , sabendo-se que é nula quando a altura é zero.
14. Verificou-se que a densidade do ar em certa região industrial é mais sensível na direção vertical e que a taxa de variação é inversamente proporcional ao quadrado da altura. Estude a densidade do ar sabendo que tende a zero quando a altura tende a infinito.

RESPOSTAS DA LISTA 8

1. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2, 1) = 4$
2. $-\nabla f(1, 2, 1) = (-2, 4, -2)$
3. $-\nabla f(0, 0, 0) = (-2, 0, 2)$
4. $\frac{4\sqrt{21}}{3}; (4, 4, 8); 4\sqrt{6}$
5. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = a^3$
6. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \begin{cases} 0, & \vec{u} = (\pm 1, 0) \text{ ou } \vec{u} = (0, \pm 1) \\ \neq, & \text{caso contrário} \end{cases}$
7. (a) $\nabla f(1, 1) = (1, 3)$ (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2\sqrt{2}$
8. (a) $x^2 + 2y^2 = 17$ (b) $\nabla T(3, 2) = (-6, -8)$
 (c) $\Delta T \simeq dT = 0,1^\circ C$, pois $\Delta x = -\frac{3}{5} \times 0,01$ e $\Delta y = -\frac{4}{5} \times 0,01$
 (d) $\Delta T \simeq dT = 0,08^\circ C$, pois $\Delta x = 0$ e $\Delta y = 0,01$
9. (a) $\Delta T \simeq 4 + 3\sqrt{3}^\circ C$ (b) $\Delta T \simeq -4 - 3\sqrt{3}^\circ C$
10. zero
11. (a) $(6, 8)$ (b) $(6, 8)$; taxa máxima = 10
 (c) $(-6, -8)$; taxa mínima = -10 (d) $5\sqrt{3}$
12. $dT_{\vec{u}}(P) = 2k\overrightarrow{CP} \cdot \vec{u}$, $k > 0$; taxa máxima = $2k\|\overrightarrow{CP}\|$; taxa mínima = $-2k\|\overrightarrow{CP}\|$;
 taxa nula na direção e nos dois sentidos perpendiculares a \overrightarrow{CP} .
13. $T(x, y, z) = \frac{1}{2}kz^2$, k constante de proporcionalidade positiva.
14. $T(x, y, z) = \frac{k}{z}$, k constante de proporcionalidade positiva.