Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2012-1
Regra da cadeia

1. Se $f(x,y)=e^{xy}$, $g(t)=\cos t$, $h(t)=\operatorname{sen} t$ e $F(t)=f(g(t),h(t))$, calcule $F'(0)$.

2. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w=xy+yz+xz$, $x=r$, $y=r\cos t$, e $z=r\operatorname{sen} t$.

3. Seja $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)-g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, onde f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Mostre que $z_x+\dfrac{y}{x}\,z_y=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4. Um ponto se desloca sobre a curva $x=2\operatorname{sen} t$, $y=7\cos t-3$, $z=f(2\operatorname{sen} t, 7\cos t-3)$, onde $f(x,y)=\sqrt{49-x^2-y^2}$. Qual a componente vertical (em z) da velocidade no instante que o ponto está na posição $(x,y,z)=(2,\ -3,\ 6)$?

5. O que está errado com o seguinte argumento?

   Suponha que $w=f(x,y)$ com $y=x^2$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+2\cdot x\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

   Assim, $0=2\cdot x\cdot(\partial w/\partial y)$, de modo que $\partial w/\partial y=0$.

6. Seja $w=x^2+y^2-z^2$, $x=\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ e $z=\rho\cos\varphi$. Calcule w_ρ, w_φ e w_θ.

7. Se $w=f(x,y)$, f derivável em $\mathbb{R}^2$, $x=r\cos\theta$ e $y=r\operatorname{sen}\theta$, mostre que $w_x^2+w_y^2=w_r^2+\dfrac{w_\theta^2}{r^2}$.

8. Se $u=x^mf\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{z},\dfrac{z}{x}\right)$, f diferenciável em $\mathbb{R}^3$, mostre que $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=mu$.

9. Sejam g e h funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)=(g(x,y))^{h(x,y)}$. Assuma que $g(1,2)=2$, $h(1,2)=-2$, $g_x(1,2)=-1$, $g_y(1,2)=3$, $h_x(1,2)=5$ e $h_y(1,2)=0$. Encontre $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$.

10. Seja $w=\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,dt$, $x=rs^4$ e $y=r^4s$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

11. Considere as funções f,g e h tais que $f(x,y)=\big(xy,x^2+y,x-y\big)$, $g(u,v,w)=2w\ln(uv)$ e $h(s)\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$. Seja $H(x,y)=(h\circ g\circ f)(x,y)$, h derivável em $\mathbb{R}$.

    (a) Para ser possível calcular $\dfrac{\partial H}{\partial x}(1,3)$, para que valor de s é preciso conhecer $h'(s)$?

    (b) Supondo que para o valor de s do item anterior, $h'(s)=5$, calcule $\dfrac{\partial H}{\partial x}(1,3)$.

12. Mostre que a função $u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)$, onde c é constante e F, G são de classe C^2 em $\mathbb{R}$, é solução da equação da onda $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$.

13. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x,y)$, T de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que $\dfrac{\partial^2T}{\partial y\partial x}(x,y)=0$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y)=2$. Calcule $\dfrac{\partial^2U}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)$, sendo $U(\rho,\theta)=T(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)$.

14. Seja $g(u,v)=f(u{+}v,uv)$, f de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, $x=u{+}v$, $y=uv$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,1)$ e $\dfrac{\partial^2g}{\partial u\partial v}(1,1)$, sabendo que $f_x(2,1)=3$, $f_y(2,1)=-3$, $f_{xx}(2,1)=0$, $f_{xy}(2,1)=f_{yx}(2,1)=1$, $f_{yy}(2,1)=2$.

15. Se a, b, c e k são constantes, mostre que $w = (a \cos cx + b \operatorname{sen} cx)e^{-kc^2 t}$ satisfaz a equação do calor $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

16. Sejam $z = z(x, y)$, z de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \operatorname{sen} v$.

    Suponha que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

17. Suponha que $f \in \mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $c \neq 0$, c constante e $f(x, t)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
    Determine constantes m, n, p e q para que $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = mu + nv$, $mn \neq 0$ e $t = pu + qv$, $pq \neq 0$, satisfaça a equação $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

RESPOSTAS DA LISTA 6 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $F'(0) = 1$
2. $w_r = r(2 \operatorname{sen} t + 2 \cos t + \operatorname{sen}(2t))$, $w_t = r^2(\cos t - \operatorname{sen} t + \cos 2t)$
3. Aplicando a regra da cadeia e simplificando, $z_x = f\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{x} \cdot f'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x} \cdot g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $z_y = f'\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{x} \cdot g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
   Substituindo z_x e z_y na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
4. $\dfrac{dz}{dt}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$
5. Não é possível "cortar" os termos $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ que aparecem dos dois lados da equação pois, apesar de aparentemente serem iguais, têm significados diferentes. O termo do lado esquerdo é a derivada parcial da função composta e o do lado direito é a derivada parcial da função externa na composta.
6. $w_\rho = -2\rho \cos(2\varphi)$; $w_\varphi = 2\rho^2 \operatorname{sen}(2\varphi)$; $w_\theta = 0$.
7. Aplicando a regra da cadeia, $w_r = w_x \cdot \cos \theta + w_y \cdot \operatorname{sen} \theta$ e $w_\theta = w_x \cdot (-r \operatorname{sen} \theta) + w_y \cdot (r \cos \theta)$. Substituindo w_r e w_θ na expressão do lado direito da equação e usando simplificação trigonométrica, verifica-se que é igual à expressão do lado esquerdo da equação.
8. Seja $r = \dfrac{y}{x}$; $s = \dfrac{x}{z}$; $t = \dfrac{z}{x}$ e $v = f(r, s, t)$. Aplicando a regra da cadeia para calcular as derivadas parciais, multiplicando-as pelos termos indicados na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, obtém-se $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = m\, x^m\, v + x^m \left(-\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial s} - \dfrac{z}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$; $y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^m \cdot \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial r}$; $z\dfrac{\partial u}{\partial z} = x^m \left(-\dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{z}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$.
   Somando e simplicando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
9. $f_x(1, 2) = \dfrac{1 + 5 \ln 2}{4}$; $f_y = (1, 2) = -\dfrac{3}{4}$.
10. $w_r = -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s\, e^{r^8 s^2}$; $w_s = -4rs^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^8 s^2}$.
11. (a)$s = -4 \ln 12$ (b)$\dfrac{\partial H}{\partial x}(1, 3) = -30 + 10 \ln 12$.
12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F''(x + ct)\left(c^2\right) + G''(x - ct)\left(c^2\right)$; $c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2(F''(x + ct) + G''(x - ct))$. São iguais.
13. $-2\rho \operatorname{sen} \theta - (\rho \cos \theta) \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) + \left(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta\right) \cdot \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$
14. $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1, 1) = 0$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1) = 1$
15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (a \cos cx + b \operatorname{sen} cx)\left(-kc^2\right) e^{-kc^2 t}$; $k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k(-ac^2 \cos cx - bc^2 \operatorname{sen} cx)e^{-kc^2 t}$, comparando, são iguais.
16. $= 0$
17. Existem várias respostas, pois $mn + c^2 pq = 0$ e $np + mq = 0$ são condições suficientes. Por exemplo, $m = n = 1$, $q = \dfrac{1}{c^2}, p = -\dfrac{1}{c^2}$.