Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 3 - 2012-1**
Derivadas parciais. Diferenciabilidade.
Plano tangente. Diferencial total.

Nos exercícios 1. a 8. determine as derivadas parciais da função dada.

1. $f(x,y) = \left(x^3+y^3\right)(x-y)$
2. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + \cos(x-y)$
3. $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)$
4. $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \cos t \; dt$
5. $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y e^{-t^2} \; dt$
6. $f(x,y,z) = \dfrac{e^x}{e^y - e^z}$
7. $w = f(x,y,z) = (y^2+z^2)^x$.
8. $w = f(r,s,v) = (2\,r + 3\,s)^{\cos(v)}$.
9. Mostre que se $w = x^2y + y^2z + z^2x$ então $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2$.
10. Calcule as derivadas parciais de $f$ no ponto $(3, \pi/4)$, onde $f(x,y) = \ln(x \tan y)$.
11. Seja $f(x,y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)$ e interprete geometricamente.
12. Dada a função $z = \displaystyle\int_x^{x^2+y^2} e^t \; dt$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,2)$.
13. Na figura (1) encontram-se os gráficos de três funções de duas variáveis:

$$f, \quad \partial f/\partial x \quad \text{e} \quad \partial f/\partial y.$$

Em (c) está o gráfico de $f$. Identifique os outros dois gráficos.

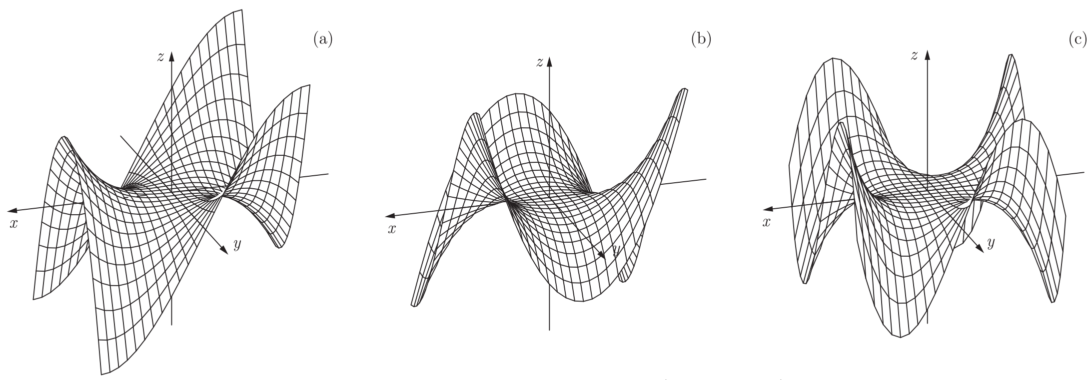



Figura 1: Os gráficos de $f$, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

14. Mostre que no ponto $(0,0)$ a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

não é contínua, não tem uma das derivadas parciais e não é diferenciável.

15. Mostre que no ponto $(0,0)$ a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

não é contínua, não é diferenciável, porém tem derivadas parciais.

16. Mostre que no ponto $(0,0)$ a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    é contínua, tem derivadas parciais, mas não é diferenciável.

17. Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^3-y^3\right)}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável.

18. Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável.

19. Determine o conjunto dos pontos onde $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável.

20. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Calcule $f_x$ e $f_y$
    (b) Mostre que $f$ é derivável em $\mathbb{R}^2$
    (c) Mostre que $f_x$ não é contínua.

21. A função $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é de classe $C^1$ em $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$? Justifique.

22. A função $f(x,y,z) = \ln(1-x-y-z)$ é de classe $C^1$ em $(x,y,z) \in D_f$? ($D_f$ é o maior domínio possível de $f$ contido no $\mathbb{R}^3$). Justifique.

23. Diga se as afirmativas são verdadeiras ou falsas. Justifique as que forem verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas. Assuma que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, o domínio $D_f$ é aberto e $X_0 \in D_f$.

    (a) Se $f$ é contínua em $X_0$ então f é derivável em $X_0$.
    (b) Se $f$ é contínua em $X_0$ então $f$ possui as derivadas parciais em $X_0$.
    (c) Se $f$ possui todas as derivadas parciais em $X_0$ então $f$ é contínua em $X_0$.
    (d) Se $f$ possui todas as derivadas parciais em $X_0$ então $f$ é derivável em $X_0$.
    (e) Se $f$ é contínua e possui todas as derivadas parciais em $X_0$ então $f$ é derivável em $X_0$.
    (f) Se $f$ é derivável em $X_0$ então $f$ possui todas as derivadas parciais em $X_0$.
    (g) Se $f$ é derivável em $X_0$ então $f$ é contínua em $X_0$.
    (h) Se $f$ é derivável em $X_0$ então todas as suas derivadas parciais são contínuas em $X_0$.
    (i) Se $f$ possui todas as derivadas parciais contínuas em $X_0$ então $f$ é derivável em $X_0$.
    (j) Se $f$ não possui uma da derivadas parciais em $X_0$ então $f$ não é derivável em $X_0$.
    (k) $f$ possui todas as derivadas parciais contínuas em $X_0 \Leftrightarrow f$ é derivável em $X_0$.

24. Se $f(x,y) = \arctan(x-2y)$, determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f$ no ponto $(2,1,f(2,1))$.

25. Seja $f(x,y) = x\cos\dfrac{x}{y}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de $f$ contém a origem.

26. Determine a equação de um plano que seja paralelo ao plano $z = 2x+3y$ e tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2+xy$.

27. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$.
(a) Calcule um valor aproximado para a variação $\Delta z$ em $z$, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
(b) Calcule um valor aproximado para $z$ correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

28. Use uma função apropriada e calcule um valor aproximado para $\sqrt{(0,01)^2 + (3,98)^2 + (2,99)^2}$.

29. A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$. Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule o valor aproximado para a variação $\Delta P$, quando $V$ decresce de $0,2$ volts e $R$ aumenta de $0,01$ ohms.

30. Em um setor circular, o ângulo central é $80°$ e o raio é 20 cm. Reduzindo-se o ângulo de $1°$, qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique aproximadamente inalterada?
Lembrete: área do setor circular $= \dfrac{\theta r^2}{2}$, $\theta$ em radianos.

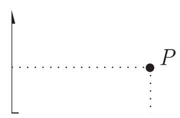
31. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período $T$ de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, sendo o erro relativo en $l$ igual a $1\,\%$ e em $g$ igual a $3\,\%$.

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

32. A análise de certos circuitos eletrônicos envolve a fórmula
$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega}},$$
em que $I$ é a corrente, $V$ a voltagem, $R$ a resistência, $L$ a indutância e $\omega$ uma constante positiva. Calcule e interprete $\partial I/\partial R$ e $\partial I/\partial L$.

33. Em um dia claro, a intensidade da luz solar às $t$ horas após o nascente e à profundidade oceânica de $x$ metros, pode ser aproximada por
$$I(x,t) = I_0\, e^{-k\,x}\ \mathrm{sen}^3(\pi\, t/D),$$
com $I_0$ a intensidade da luz solar ao meio-dia, $D$ a quantidade horas do dia com luz solar e $k$ uma constante positiva. Se $I_0 = 1000$, $D = 12$ e $k = 0.10$, calcule e interprete as derivadas parciais $\partial I/\partial t$ e $\partial I/\partial x$ quando $t = 6$ horas e $x = 5$ metros.

34. Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de $h$ metros de altura, a concentração $C(x,y)$ (em $\mu/\mathrm{m}^3$) do poluente em um ponto $P$ situado a $y$ metros acima do chão e cuja projeção ortogonal sobre o chão está a $x$ quilômetros da base da chaminé pode ser representada por $C(x,y) = \dfrac{a}{x^2}\left(e^{-b\,(y-h)^2/x^2} + e^{-b\,(y+h)^2/x^2}\right)$




em que $a$ e $b$ são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente (veja a figura).

Suponha que $C(x,y) = \frac{200}{x^2}\left(e^{-0.02\,(y-10)^2/x^2} + e^{-0.02\,(y+10)^2/x^2}\right)$.

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ e $\partial C/\partial y$ no ponto $P = (2,5)$.

RESPOSTAS DA LISTA 3 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $\begin{cases} f_x = 4x^3 + y^3 - 3x^2y \\ f_y = -x^3 + 3y^2x - 4y^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} f_x = \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) \\ f_y = \cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) \end{cases}$

3. $f_x = \dfrac{2x}{\sqrt{y^4 - x^4}}, \quad f_y = \dfrac{-2x^2}{y\sqrt{y^4 - x^4}}$

4. $f_x = -\cos x, \quad f_y = \cos y$

5. $f_x = -e^{-x^2}, \quad f_y = e^{-y^2}$

6. $f_x = \dfrac{e^x}{e^y - e^z}, \quad f_y = \dfrac{-e^{x+y}}{(e^y - e^z)^2}, \quad f_z = \dfrac{e^{x+z}}{(e^y - e^z)^2}$

7. $w_x = \left(y^2 + z^2\right)^x \ln\left(y^2 + z^2\right)$
   $w_y = 2xy\left(y^2 + z^2\right)^{x-1}, \quad w_z = 2xz\left(y^2 + z^2\right)^{x-1}$

8. $w_r = 2\cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
   $w_s = 3\cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
   $w_v = -\operatorname{sen}(v)\ln(2r + 3s)(2r + 3s)^{\cos(v)}$

9. Calculando as derivadas parciais, somando e simplificando, chega-se ao termo do lado direito da equação.

10. $f_x(x,y) = \dfrac{1}{x}; \quad f_x(3,\pi/4) = 1/3; \qquad f_y(x,y) = \dfrac{\tan y}{x\sec^2 y}; \quad f_y(3,\pi/4) = 2$

11. $f_x(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; \quad f_x(1,3) = -\dfrac{1}{2}; \qquad f_y(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; \quad f_y(1,3) = -\dfrac{3}{2}$
    Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,3)$, $r$ no plano $y = 3$. Como $f_x(1,3) < 0$, o ângulo entre $r$ e o semi-eixo positivo $Ox$ é maior que $90°$.
    Seja $s$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,3)$, $s$ no plano $x = 1$. Como $f_y(1,3) < 0$, o ângulo entre $r$ e o semi-eixo positivo $Oy$ é maior que $90°$.

12. $z_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - e^x; \quad z_x(1,2) = -e + 2e^5; \qquad z_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2}; \quad z_y(1,2) = 4e^5.$

13. (a) $\partial f/\partial y$ (b) $\partial f/\partial x$

14. $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) \overset{\text{definição}}{\Rightarrow} f$ não é contínua em $(0,0) \overset{\text{teorema}}{\Rightarrow} f$ não é diferenciável em $(0,0)$.
    $\exists\ f_x(0,0) = 1$ e $\nexists\ f_y(0,0)$.

15. $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) \overset{\text{definição}}{\Rightarrow} f$ não é contínua em $(0,0) \overset{\text{teorema}}{\Rightarrow} f$ não é diferenciável em $(0,0)$.
    $\exists\ f_x(0,0) = 0$ e $\exists\ f_y(0,0) = 0$.

16. $\exists \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \overset{\text{definição}}{\Rightarrow} f$ é contínua em $(0,0)$. $\exists\ f_x(0,0) = 1$ e $\exists\ f_y(0,0) = 0$.
    Verificando a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$: podemos aplicar o corolário de um teorema (diferencíavel $\Rightarrow$ existência das derivadas parciais), no cálculo do limite do erro da definição de diferenciabilidade ,
    $$\frac{\text{erro}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(9,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-hk^2}{\sqrt{\left(h^2+k^2\right)^3}}.$$
    $$\nexists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{\sqrt{\left(h^2+k^2\right)^3}} \Rightarrow \nexists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\text{erro}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{\text{corolário}}{\Rightarrow} f \text{ não é diferenciável em } (0,0).$$

17. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\text{erro}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\left(h^3 - k^3\right)}{\sqrt{\left(h^2+k^2\right)^3}} = 0 \overset{\text{corolário}}{\Rightarrow} f$ é diferenciável em $(0,0)$.

18. Para $(x,y) = (0,0) : f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\text{erro}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(h^4\right)}{\sqrt{\left(h^2+k^2\right)^3}} = 0 \overset{\text{corolário}}{\Rightarrow} f$ é diferenciável em $(0,0)$. Para $(x,y) \neq (0,0)$: $f$ é diferenciável pois é quociente de funções diferenciáveis.

19. Diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ pois $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f$ é quociente de funções diferenciáveis e para $(x,y) = (0,0)$, $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) \overset{\text{definição}}{\Rightarrow} f$ não é contínua em $(0,0) \overset{\text{teorema}}{\Rightarrow} f$ não é diferenciável em $(0,0)$.

20. (a) $f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    $f_y(x,y) = \begin{cases} 2y\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f$ é diferenciável, pois é quociente de funções diferenciáveis e para $(x,y) = (0,0)$, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\text{erro}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{h^2+k^2} = 0 \overset{\text{corolário}}{\Rightarrow} f$ é diferenciável em $(0,0)$.

(c) Tomando o limite de $f_x(x,y)$ pela reta $\gamma(t) = (t,t)$, quando $t \to 0$, $f_x(t,t)$ oscila entre $+\infty$ e $-\infty$, logo $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \overset{\text{definição}}{\Rightarrow} f_x$ não é contínua em $(0,0)$.

21. Não, pois $\nexists f_x(0,0,0)$ (ou $\nexists f_y(0,0,0)$ ou $\nexists f_z(0,0,0)$) $\overset{\text{teorema}}{\Rightarrow} f$ não é de classe $C^1$ em $(0,0,0)$.
22. Sim, pois $f$ é composta de funções de classe $C^1$.
23. (a) Falsa. Contra-exemplo: $f(x,y) = |x+y|$ ou exercício 16.
    (b) Falsa. Contra-exemplo: $f(x,y) = |x+y|$ ou $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
    (c) Falsa. Contra-exemplo: função e ponto do exercício 15.
    (d) Falsa. Contra-exemplo: funções e respectivos pontos dos exercícios 15 e 16.
    (e) Falsa. Contra-exemplo: função e ponto do exercício 16.
    (f) Verdadeira. É um teorema provado logo após a definição de diferenciabilidade.
    (g) Verdadeira. É um teorema provado logo após a definição de diferenciabilidade.
    (h) Falsa. Contra-exemplo: função e ponto do exercício 20.
    (i) Verdadeira. É o teorema da condição suficiente para diferenciabilidade.
    (j) Verdadeira. É a contra-recíproca do teorema: $f$ derivável em $X_0 \Rightarrow f$ possui todas as derivadas parciais em $X_0$.
    (k) Falsa. Vale a $\Rightarrow$, que é o teorema da condição suficiente de diferenciabilidade, mas não vale a $\Leftarrow$, conforme o iem (h).
24. Plano tangente: $z = (x-2) - 2(y-1)$. Reta normal: $(x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(1,-2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.
25. A equação do plano tangente em $\forall\,(x_0, y_0, f(x_0,y_0))\,,\ \ y_0 \neq 0$ é

    $z = \left(-\dfrac{x_0}{y_0}\,\text{sen}\,\dfrac{x_0}{y_0} + \cos\dfrac{x_0}{y_0}\right)x + \left(\dfrac{x_0^2}{y_0^2}\,\text{sen}\,\dfrac{x_0}{y_0}\right)y$, que é satisfeita por $(x,y,z) = (0,0,0)$.
26. $z = -3 + 2(x-3) + 3(y+4)$.
27. (a) 0,026 (b) 1,026
28. Sendo $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, então

    $\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2} = f(0+0.01,\ 4-0.02,\ 3-0.01) \simeq 4,978.$
29. -5

30. $0,125$ cm

31. $2\,\%$

32. $\dfrac{\partial I}{\partial R} = \dfrac{-RV}{\sqrt{(R^2+L^2w)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente $I$ em relação a variação da resistência $R$.

    $\dfrac{\partial I}{\partial L} = \dfrac{-2wLV}{\sqrt{(R^2+L^2w)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente $I$ em relação a variação da indutância $L$.
33. $\dfrac{\partial I}{\partial x}(5,6) = -100e^{-0.5}$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação da profundidade no nível de profundidade 5 metros, após 6 horas do amanhecer.

    $\dfrac{\partial I}{\partial t}(5,6) = 0$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação do tempo após 6 horas do amanhecer, no nível de profundidade 5 metros.
34. $\dfrac{\partial C}{\partial x}(2,5) = -12.5\left(3.5\,e^{-0.125} - 0.5\,e^{-1.125}\right) \simeq -36.5801$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da distância $x$, quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.

    $\dfrac{\partial C}{\partial y}(2,5) = -2.5\left(e^{-0.125} - 3\,e^{-1.125}\right) \simeq -0.2287$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da altura $y$, quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.