Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto
2^o semestre de 2017

Aula 9 – diferenciabilidade continuação

Interpretação geométrica No final da aula passada, fizemos a interpretação geométrica da derivada para funções vetoriais de uma variável (curvas parametrizadas). A conclusão é que se $\gamma(t)$ é uma curva parametrizada, $\gamma'(t)$ é tangente à essa curva. Nessa aula, vamos usar esse fato para interpretar algumas outras situações . Em especial, queremos olhar para funções $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciáveis. **Observe que estamos falando, aqui, de superfícies parametrizadas**. Começamos com um exemplo:

`Exemplo 1.` *Considere* $F(\theta, z) = (cos(\theta), sen\ (\theta), z)$, $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$. *Note que a função* F *parametriza uma casca cilíndrica de raio* 1 *e altura* 2. *Vamos fixar, primeiro, uma das variáveis do domínio, por exemplo, escolhemos* $\theta = \pi/4$. *Assim,* F *se torna função de uma variável (*z*), e nesse valor de* θ *temos* $F(\pi/4, z) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, z)$. *Quando* z *varia, a imagem de* F *descreve uma curva (no caso uma reta) sobre a casca cilíndrica. Desenhe!!!! Em outras palavras, a restrição de* F *à reta* $\theta = \pi/4$ *é uma parametrização da reta em questão. Derivando* F *em* z*, ao longo dessa restrição , temos* $F_z = (0, 0, 1)$ *e, como era de se esperar, essa derivada é o vetor tangente à reta parametrizada. (por que era de se esperar?). Agora, fixe a variável* z*. Por exemplo, escolha* $z = 1$*. Quando* θ *varia, a imagem de* F *descreve o círculo* $(cos(\theta), sen\ (\theta), 1)$ *na casca cilíndrica. Derivando* F *em relação 'à* θ *nessa restrição , temos:* $F_\theta = (sen\ (\theta), -cos(\theta), 0)$*, avaliado em* $\theta = \pi/4$*, temos* $F_\theta = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ *que, como era de se esperar (por que?) é a direção tangente ao círculo mencionado. Temos, assim, duas curvas sobre a superfície - o círculo e a reta - que se interceptam sem tangência em um ponto. E temos também as direções tangentes à superfície nesse ponto. Portanto, o vetor normal ao plano tangente à superfície, nesse ponto será dado por* $(0, 0, 1) \times (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$*, onde* $\times$ *representa produto vetorial.*

`Exercício 1.` *escreva a equação do plano tangente ao cilindro parametrizado no exemplo acima, no ponto* $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$.

`Exercício 2.` *Repita o raciocínio do exemplo, para* $F(x, y) = (x, y, x^2+y^2)$ *e obtenha a equação do plano tangente ao paraboloide parametrizado por* F *no ponto* $(1, 2, 5)$

`Exercício 3.` *Repita o raciocínio do exemplo, para* $F(x,y) = (x, y, f(x,y))$*, onde* $f(x,y)$ *é uma fc real, e obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$*.*

Problemas para sala de aula

`Exercício 4.` *Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de* $f(x,y) = sen\ (xy)$*, no ponto* $(1, \pi, 0)$*.*

`Exercício 5.` *Suponha que* $\gamma(t)$ *é uma curva parametrizada por:* $(t, t^3 + 2t)$*. Sabemos que (se não "sabemos", procure saber, com urgência),* $\gamma'(t) = (1, 3t^2 + 2)$ *é a direção da tangente à* γ *em* $\gamma(t)$*, para cada* t*. Como você compara esse fato com o seu conhecimento de cálculo 1, em relação à função* $g(t) = t^3 + 2t$*? Obtenha a direção tangente à* γ *no ponto* $(1, 3)$*.*

`Exercício 6.` *Mesmo enunciado do problema anterior com* $\gamma(t) = (3t, (3t)^3 + 6t)$*. Observe que a curva parametrizada é a mesma do exercício anterior. Agora, obtenha a direção tangente à* γ *no ponto* $(1, 3)$ *utilizando essa parametrização . Compare com o exercício anterior.*

`Exercício 7.` *Dada uma função real qualquer,*$f(t)$*, de uma variável, parametrize seu gráfico por uma função* $\gamma(t)$*. Derive* $\gamma(t)$ *e, a partir daíparametrize a reta tangente à* $\gamma(t)$*. Compare com a definição de derivada. Compare, também, com o que você sabe de cálculo de uma variável.*

`Exercício 8.` *Duas curvas,* γ_1 *e* γ_2 *se interceptam em um ângulo reto no ponto* $(e, 3)$*.* γ_1 *é a imagem de* $t \mapsto (e^t, t^2 + 1)$*.* γ_2 *é gráfico de uma função* $f(t)$*. Encontre um valor para* $f'(e)$*. A resposta é única?*