Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto
2^o semestre de 2017
Aula 8 – diferenciabilidade

Lembrando Cálculo I Considere uma função $f(x)$ com domínio e contradomínio real. fixe um ponto x_0 no domínio de f e suponha que se queira aproximar esta função **em vizinhança de** $x_0$por um polinômio de grau 1. Isto é, queremos determinar a e b constantes tais que:

$$f(x_0 + h) \simeq a(x_0 + h) + b \tag{1}$$

onde $\simeq$ se lê como *aproximadamente igual*. de fato, queremos que a equação (1) seja tão mais verdadeira quanto mais próximo $x_0 + h$ estiver de x_0. Isto é, gostaríamos de obter a e b tal que se h está próximo de 0, a diferença entre $f(x_0 + h)$ e $a(x_0 + h) + b$ é muito pequena. reescrevemos então o problema como sendo: obtenha a e b tal que:

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b + erro(h) \tag{2}$$

e $\lim_{h\to 0} erro(h) = 0$.

É bastante razoável que a proximação que procuramos seja exata em x_0, de modo que impomos também que $erro(0) = 0$, ou seja $f(x_0) = ax_0 + b$.

Escrevemos então o problema: Dado x_0 fixo no domínio de f, procuro a e b constantes tais que:

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b + erro(h) \tag{3}$$
$$erro(0) = 0 \tag{4}$$
$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 \tag{5}$$

Substituindo (4) em (3) escrevemos:

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0 \tag{6}$$

e portanto, conhecido a sabemos determinar b. Substituindo o valor de b em (3), (4) e (5) vem:

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + f(x_0) - ax_0 + erro(h) \tag{7}$$
$$erro(0) = 0 \tag{8}$$
$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 \tag{9}$$

As equações podem ser reescritas:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + erro(h) \tag{10}$$
$$\lim_{h \to 0} erro(h) = 0 \tag{11}$$

É evidente que quando h tende a zero, o lado direito de (10) também tende a zero, o que implica que, se a nossa aproximação tem alguma chance de existir, f deve ser contínua em x_0. Além disso, se ah tende a zero mais rápido que $erro(h)$, teremos que em vizinhança de x_0, $f(x_0 + h) - f(x_0)$ será aproximada por $erro(h)$ e não por ah como gostaríamos. Por esta razão, acrescentamos à nossa formulação do problema a exigência de que $erro(h)$ deve tender a zero mais rápido que ah e uma maneira de exigir isto é impor que $\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0$. Dividindo os dois lados de (10) por h vem:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{erro(h)}{h} \tag{12}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0 \tag{13}$$

Tomando o limite quando $h \to 0$ dos dois lados (12) obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \tag{14}$$

O bserve que a equação (14) descreve o que provavelmente você está acostumado a definir como *derivada da função f em x_0*. Observe ainda, que o polinômio $ax + b$ que aproxima f em vizinhança de x_0 existe se e só se f é diferenciável em x_0 e neste caso, a é a derivada de f em x_0. Chegamos à expressão (14) procurando uma aproximação para a função por um polinômio de grau 1. De fato poderíamos formalizar nosso raciocínio redefinindo a derivada de f em x_0 assim:

Definição 1. *Dizemos que uma função f é diferenciável em x_0 se e sómente se existe um valor a tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + erro(h) \tag{15}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0 \tag{16}$$

e neste caso, a é dito a derivada de f em x_0.

`Exemplo 1.` *Queremos usar a definição 1 para mostrar que* 7 *não é a derivada de* $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ *em* $x = 3$*. Na verdade, a expressão 15 sempre pode ser escrita, a questão é se 16 pode ser satisfeita. Nesse caso, a primeira expressão fica:*

$$f(3 + h) = f(3) + 7h + erro(h) \tag{17}$$

E como a função do exemplo é $f(x) = x^2$*, a expressão fica:*

$$(3 + h)^2 = 9 + 7h + erro(h) \tag{18}$$

Note agora que a única possibilidade para $erro(h)$ *é* $(3 + h)^2 - 9 - 7h$*, o que faz todo sentido porque ele é exatamente a diferença entre o valor da função e o valor da aproximação . Então a expressão fica:*

$$(3 + h)^2 = 9 + 7h + ((3 + h)^2 - (9 + 7h)) \tag{19}$$

A questão agora é mostrar que se $h \to 0$*, o erro dividido por* h *não vai à zero.*

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9 - 7h}{h} = \tag{20}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9 - 7h}{h} = \tag{21}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h + h^2}{h} = -1 + h = -1 \tag{22}$$

E, como o limite não é zero, 7 *não é a derivada da função em* $x = 3$*.*

`Exercício 1.` *Mostre, seguindo o raciocínio do exemplo que* $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $x = 3$*. (Obs: basta exibir um valor para a que satifaça a definição).*

a definição de derivada ressalta a questão fundamental, qual seja: a derivada de uma função em um ponto surge como necessidade de aproximar essa função por uma mais simples (no caso, um polinÃ´mio de grau 1). Por outro lado, a definição , em si, é de pouca valia para calcular derivadas e sabemos que existem fórmulas e teoremas para isso.

Funções vetoriais de várias variáveis A ideia de diferenciabilidade (ou noção de derivadas) para funções vetoriais é exatamente a mesma daquela apresentada para funções reais de uma variável, qual seja: aproximar a função por um "polinômio de grau 1"na vizinhança de um ponto determinado. Supondo que o domínio de F seja $\mathbb{R}^n$ e o contradomínio seja $\mathbb{R}^m$ tentamos escrever uma expressão como em 1:

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + AH + erro(H),\ X_0, H \in \mathbb{R}^n \tag{23}$$

O lado esquerdo da equação 23 é um vetor de $\mathbb{R}^m$. Do lado direito temos uma soma de $F(X_0)$ com AH e, evidentemente essa soma precisa ser, também um vetor de $\mathbb{R}^m$. $F(X_0)$ já pertence a $\mathbb{R}^m$. Como $H \in \mathbb{R}^n$, A deve ser um "objeto matemático", parecido com uma constante que, quando multiplicado por H, gere um vetor de $\mathbb{R}^m$. A coisa mais imediata a pensar, aqui, é que A é uma matriz constante $m \times n$. Nesse caso, a expressão em 23 descreve uma função afim como na definição no caso do cálculo de uma variável. De fato, essa é a ideia da definição de derivada: procurar uma aproximação afim para a função estudada na vizinhança de um ponto.

Definição 2. *Formalmente, dizemos que uma função é diferenciável sse existe uma matriz A com m linhas e n colunas, tal que*

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + AH + erro(H),\ X_0, H \in \mathbb{R}^n \tag{24}$$

$$\lim_{H \to (0,0,0\dots)} \frac{erro(H)}{||H||} = (0, 0, \dots) \tag{25}$$

Uma notação ussual para a matriz dervada é DF.

`Exercício 2.` *Dada a função :*

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & \pi & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calcule a derivada de F, (DF).

Assim, quando pensamos na *derivada* de uma função vetorial de várias variáveis, temos que pensar em uma **matriz**. O problema agora é: como determinar essa matriz. Para isso vamos estudar o que chamamos de derivadas parciais.

Derivadas Parciais A definição formal de derivada parcial pode ser facilmente encontrada em qualquer livro ou mesmo na web. Aqui, nos limitamos a explicar o sentido da derivada parcial. Dada uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podemos fixar $n-1$ variáveis e teremos então uma função de uma única variável. Por exemplo: se $f(x,y,z) = x^3 e^y z$ podemos imaginar que fixamos $x = x_0$, $z = z_0$ e x está variando. Olhando para a função $f(x_0, y, z_0) = x_0^3 e^y z_0$, e podemos pensar em derivar essa função , como uma fc de uma variável y. Essa derivada será chamada de *derivada parcial de f em relação à variável y*. Notação : $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou f_y. No caso do nosso exemplo temos $f_y(x_0, y, z_0) = x_0^3 e^y z_0$.

`Exemplo 2.` *Se $f(x,y) = ysen\ (x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ycos(x)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = sen\ (x)$*

`Exercício 3.` *Use o seu conhecimento de cálculo de uma variável para definir uma derivada parcial como limite.*

`Exemplo 3.` *Se $f(x,y,z) = 3x^2 ysen\ (yz)$, $f_x(x,y,z) = 6xysen\ (yz)$, $f_y(x,y,z) = 3x^2 sen\ (yz) + 3x^2 yz cos(yz)$, $f_z(x,y,z) = 3x^2 yz cos(yz)$.*

A Derivada (diferencial) de uma função vetorial de várias variáveis (matriz Jacobiana) Na definição de derivada mencionamos o fato de que a derivada deveria ser uma matriz. Vamos definir essa matriz (DF) a partir das derivadas parciais.

Definição 3. *Dada:*

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \end{array}$$

definimos a Matriz Jacobiana de F como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definição 4. *A derivada (ou diferencial) de uma função f em um ponto x_0, é a matriz jacobiana de f em X_0.*

`Exemplo 4.` *Se $F(x,y) = (x^2y, x+y, xy^3)$, a matriz jacobiana de F em um ponto (x,y) é:*

$$\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix}$$

Problemas para sala de aula

`Exercício 4.` *Para cada uma das funções f a seguir, obtenha a matriz Jacobiana. (Obs: não vou explicitar o domínio em cada função . Assumam que o domínio é algum conjunto em que a expressão faça sentido.)*

$a)f(x) = (x, x^2, 3)$	$b)f(x,y) = (x, x^2, 3)$
$c)f(x,y,z) = zxy$	$d)f(x,y) = (x+y, x-y)z$
$e)f(x,y,z) = (e^{xy}, x^2 sen\ (xy))$	$f)f(x,y) = x^2$

`Exercício 5.` *Para cada uma das funções abaixo, escreva a expressão da aproximação de f como na definição 2.*

$a)f(x,y) = xy\ X_0 = (1,2)$	$b)f(t) = (t, t^3, -2t)\ t_0 = 4$
$c)f(x,y) = (xy, cos(xy), x^3y^2)\ X_0 = (1,\pi)$	$f(x,y,z) = (x^2+3xz, e^{xz}, \ln y^2x)\ X_0 = (2,1,0)$

`Exercício 6.` *Considere a função $f(t) = (t, t^2)$. A derivada de f em no ponto 3 é dada por:*

$$Df(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Escrevendo a aproximação dada na definição de derivada, temos:

$$\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}(t-3) + erro(t)$$

Procure uma interpretação geométrica para a função do lado direito da igualdade.

`Exercício 7.` *Mesmo enunciado do exerc
i cio anterior para $f(t) = (t^2, t^4)$ em $t = \sqrt{3}$. Compare os dois resultados. Interprete.*

`Exercício 8.` *Mesmo enunciado do exercício anterior para $f(t) = (t, t, 2t)$, $t = 1$ e $f(t) = (2t, sen\ (t))$ em $t = \pi/4$.*