Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto[1]
2^o semestre de 2017

Aulas 6 e 7 Limites e Continuidade

Estas duas aulas envolvem detalhes muito técnicos. Por essa razão, serão trabalhadas de modo diferente. Na primeira (aula 6), o conteúdo será discutido como aula expositiva. Na segunda, os exemplos e exercícios serão tratados sob forma de estudo orientado.

1 Limites

Lembre que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem limite L quando x tende para a, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.
A definição para funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a mesma! Apenas interprete x e a como pontos em $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ e L como pontos de $\mathbb{R}^m$ e escreva $\|x - a\|$ e $\|f(x) - L\|$ ao invés de $|x - a|$ e $|f(x) - L|$. Assim:

Definição 1.1. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite L quando x tende para a e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ou } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$$

*se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - L\| < \epsilon$ se $0 < \|x - a\| < \delta$.
Equivalentemente,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ou } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), L) < \epsilon$ se $0 < d(x, a) < \delta$.

Propriedades 1.1. *1. O limite se existe é único. (unicidade)*
2. Se f e g, funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são tais que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ e $\lim_{x\to a} g(x) = B$, então :

(a) $\lim_{x\to a} (f + g)(x) = A + B$ (regra da adição).

(b) $\lim_{x\to a} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle A, B\rangle$; em particular, caso $m = 1$, $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = A\, B$ (regra do produto).

[1] o conteúdo dessas aulas foi retirado, quase que integralmente, da apostila escrita em conjunto com Maria Lucia Menezes.

(c) *caso* $m = 1$ *e* $B \neq 0$ *então* $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{A}{B}$ *(regra do quociente).*

(d) *caso* $m = 1$, $\lim_{x \to a} f(x)^n = A^n, n \in \mathbb{N}$.

(e) *caso* $m = 1$, $\lim_{x \longrightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{A}$ *se* p *é ímpar ou se* p *é par e* $A > 0$.

(f) $\lim_{x \longrightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$.

Valem também o teorema do sanduíche e suas conseqÃ¼ências:

`Exemplo 1.` *Calcule* $\lim_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2) sen \left(\frac{1}{xy} \right)$.

Solução : sen $\left(\frac{1}{xy} \right)$ *é limitada e além disso,* $\lim_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2) sen \left(\frac{1}{xy} \right) = 0.$$

Note que a definição acima pode ser reescrita como:

Definição 1.2. *(reescrita) A função* f *tem limite* L quando x tende para a, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ou, equivalentemente, $f(x) \longrightarrow L$ quando $x \longrightarrow a$, se para toda bola aberta de raio $\epsilon > 0$ em torno de L, existe uma bola aberta de raio $\delta > 0$ tal que se $x \in B_\delta(a) - \{a\}$, então $f(x) \in B_\epsilon(L)$.

Assim, fazer x se aproximar de a, significa que x se aproxima de a segundo **qualquer** direção .

`Exemplo 2.` *Calcule* $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Solução : Note que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + y^2 = 0$. *Tomando o limite na direção* $y = 0$, *temos que*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0),\ y=0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Agora tomando o limite na direção $x = 0$, *temos que*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0),\ x=0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

Como o limite deve ser único se existir, esse limite não existe !!

`Exemplo 3.` *Calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Solução : Tomando o limite na direção $y=0$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Agora tomando o limite na direção $x=0$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Finalmente, tomando o limite na direção $x=y$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Como o limite deve ser único se existir, esse limite não existe.

`Exemplo 4.` *Calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Solução : Tomando o limite na direção $x=0$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $y=0$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $x=y$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $y=2x$*, temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^4}{25x^4} = \frac{-3}{25}$$

Logo esse limite não existe.

`Exemplo 5.` *Calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Solução : Tomando o limite na direção $x = 0$, *temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Tomando o limite na direção $x = y^2$, *temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x=y^2} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Assim, esse limite não existe.

Os exemplos anteriores ilustram que geralmente é fácil mostrar que um limite não existe. Para mostrar que existe pode ser mais difícil. Veja:

`Exemplo 6.` *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} = 0$.

Solução : $0 \le x^2 \le x^2 + y^2$, *logo,* $0 \le \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \le x^2$. *Assim,*

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} = 0$.

`Exemplo 7.` *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$.

Solução : $0 \le x^4 \le x^4 + y^2$ *logo* $0 \le x^2 \le \sqrt{x^4+y^2}$; $0 \le y^2 \le x^4 + y^2$ *logo* $0 \le |\,y\,| \le \sqrt{x^4+y^2}$. *Assim,*

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\,x^3y\,|}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^2}} \, \frac{|\,y\,|}{\sqrt{x^4+y^2}} \, |\,x\,| = 0.$$

`Exemplo 8.` *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$.

Solução : $0 \le x^2 \le x^2 + y^2 + z^2$, *logo,* $0 \le |\, x \,| \le \sqrt{x^2y^2 + z^2}$. *Da mesma forma,* $0 \le |\, y \,| \le \sqrt{x^2y^2 + z^2}$ *e* $0 \le |\, z \,| \le \sqrt{x^2y^2 + z^2}$. *Assim,*

$$0 \le \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|\, xyz \,|}{x^2 + y^2 + z^2} \le \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

Como $-|\, a \,| \le a \le |\, a \,|$, $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$.

Definição 1.3. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite infinito quando x tende para a e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \ \text{ ou, } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$$

se para todo $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x)\| > N$ se $0 < \|x - a\| < \delta$.

`Exemplo 9.` *Mostre que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$.

Solução : Para todo $N > 0$, existe $\delta = \sqrt{N}$ tal que se $\|(x, y)\| < \delta$, i.e., $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, então

$$\|f(x, y)\| = \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{\delta^2} = N.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$.

Definição 1.4. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite L quando x tende para infinito e escrevemos*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ \text{ ou, } f(x) \longrightarrow L \text{ quando } x \longrightarrow \infty$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\|f(x) - L\| < \epsilon$ se $\|x\| > N$.

`Exemplo 10.` *Mostre que* $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^4 + y^2} = 0$.

Solução : $x^4 + y^2 > x^2 + y^2$ *para* $\|x\| > 1$. *Assim,* $\dfrac{1}{x^4 + y^2} < \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ *para* $\|x\| > 1$. *Logo,*

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^4 + y^2} \le \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

(note que esse é um limite de uma variável!)

`Exercício 1.` *1. Calcule, quando existirem, os limites abaixo:*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\ (xy)}{x}$ *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *e)* $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y+z^2}{x^4+y^2+z^3}$ *f)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2x+1}{x^2-y^2-2x+2y}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1-\cos(xy-2x)}{(y-2)^2}$

2 Continuidade

Lembre da definiãq de continuidade em um ponto para funções de uma variável:

Definição 2.1. *Continuidade em um ponto*
A função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $a \in D$, *se* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. *A função* f *é descontínua em* $a \in D$ *se* $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ *ou se não existe o limite* $\lim_{x\to a} f(x)$.

A mesma definição vale para funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$!!! Observe que neste caso, está implícito na definição que a é um ponto interior do domínio de f. Uma outra maneira de escrever essa definição é:

Definição 2.2. *Continuidade em um ponto (reescrita)*
A função f *é contínua em* a, *se para toda bola aberta de raio* $\epsilon > 0$ *em torno de* $f(a)$, *existe uma bola aberta de raio* $\delta > 0$ *tal que se* $x \in B_\delta(a)$, *então* $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$.

Propriedades 2.1.
1. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *são contínuas em* a *então as funções* $f+g, f-g$ *e* $\langle f, g\rangle : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *também são contínuas em* a. *Em particular, para* $m = 1$, *a função* $fg : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *também é contínua em* a. *Além disso, caso* $m = 1$ *e* $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *também é contínua em* a.
2. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $g : D_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *são contínuas em* $a \in D_1$ *e* $b \in D_2$ *com* $f(a) = b$, *então* $g \circ f : \{x \in D_1 \subset \mathbb{R}^n; f(x) \in D_2\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *é contínua em* a.

Para funções reais de uma variável, era comum estudarmos limites e continuidade a direita e a esquerda. Isso não faz sentido para funções $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ para $n > 1$. Entretanto, neste caso, podemos estudar continuidade em pontos do bordo.

Definição 2.3. *Continuidade em pontos de bordo*
A função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in \partial D$, se $\lim\limits_{x \to a, x \in int(D)} f(x) = f(a)$.

Definição 2.4. *Continuidade*
A função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se é contínua em todos os pontos de D.

Propriedades 2.2.
1. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas então as funções $f + g, f - g$ e $\langle f, g\rangle : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ também são contínuas. Em particular, para $m = 1$, a função $fg : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ também é contínua. Além disso, caso $m = 1$ e $g(x) \neq 0$, para todo x, f/g também é contínua.
2. Se $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ são contínuas e $f(D_1) \subset D_2$, então $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua.

$$\begin{array}{ccccc} D_1 \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & D_2 \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & y & \longmapsto & g(y) \end{array}$$

AplicaÃ§ão 2.1.
1. PolinÃ´mios são contínuos.
2. Funções racionais $f : \mathbb{R}^n - \{zeros\ do\ denominador\ de\ f\} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

`Exemplo 11.` *Estude a continuidade de* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = 0 \end{cases}$.

Solução : Para $(x, y) \neq (0, 0)$, f é contínua pois é racional. Para $(x, y) = (0, 0)$, vamos estudar o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ Tomando o limite na direção $x = y$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Fazendo agora o limite na direção $x = 0$, *temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Assim, o limite não existe e portanto f *é descontínua em* $(x, y) = (0, 0)$.

`Exemplo 12.` *(exemplo 1 revisitado) Estude a continuidade de*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\dfrac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução : Note que a função $sen\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ *é contínua pois é a composta de duas funções contínuas. Veja o diagrama:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 - \{(x,y); xy \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} & & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{xy} & & \\ t & & \longmapsto sen\,(t) \end{array}$$

Assim, para $(x, y) \neq (0, 0)$, f *é contínua pois é o produto de um polinÃ´mio por uma função contínua. Além disso,* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)sen\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$, *e logo,* f *é contínua em* $(x, y) = (0, 0)$. *Portanto,* f *é contínua.*

`Exemplo 13.` *(exemplo 7 revisitado) Estude a continuidade de*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução : a função $\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ *é racional sem pólos portanto contínua. Além disso,* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$ *e logo* f *é contínua em* $(x, y) = (0, 0)$. *Portanto,* f *é contínua.*

`Exemplo 14.` *Seja* $f : [0,\infty)\times[0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,sen\,(\theta))$ *e* $g : \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \dfrac{y}{x}$. *O que você pode dizer sobre* $g \circ f$*?*

Solução :

$$g : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(r, \theta) \longmapsto g(r\cos(\theta), rsen\ (\theta)) = \tan(\theta)$$

Como f e g são contínuas, $g \circ f$ é contínua.

`Exemplo 15.` *(exemplo 6 revisitado) Obtenha, se possível, a extensão contínua da função $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$.*

Solução : f é contínua, pois é racional. Além disso, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2} =$ 0 (veja o exemplo 3.2.3), f possui extensão contínua, $F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = 0 \end{cases}$

`Exercício 2.` *Em cada caso, descreva o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ no qual a função é contínua:*

a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ *b)* $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy$ *c)* $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = 0 \end{cases}$

`Exercício 3.` *Em cada caso, descreva o subconjunto do $\mathbb{R}^3$ no qual a função é contínua:*

a) $f(x, y, z) = \dfrac{sen\ (xy) + \cos(xy)}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$ *b)* $f(x, y, z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2}$

`Exercício 4.` *A função f; $f(x, y) = |x + y - 1|$ é contínua em $\mathbb{R}^2$? Justifique.*

`Exercício 5.` *Idem para* $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2; & x^2 + y^2 \leq 4 \\ 4; & x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$

3 Respostas aos Exercícios

Seção 2.2

a) 0 | b) 0 | c) $\nexists$
d) $\nexists$ | e) $\nexists$ | f) $\nexists$
g) 1/2

Seção 2.3

1a) $x \neq y$ | 1b) $\mathbb{R}^2$ | 1c) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
2a) $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$ | 2b) $x^2 + y^2 + z^2 < 2$ | 3) Sim: é composta de contínuas

4) $f = g \circ h$, onde $h(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(t) = \begin{cases} t; & t \leq 4 \\ 4; & t > 4 \end{cases}$. Como g e h são contínuas, f também é.