Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto
2^o semestre de 2017

<u>Aula 4 Funções</u>

O conceito de Função Históricamente, a ideia de função é a de uma fórmula matemática. No século XIX, um matemático chamado Dirichlet, estudando uma teoria conhecida como *Séries de Fourier* notou que muitas funções não podiam ser descritas por fórmulas. A primeira notícia que se tem de uma tentativa de formalizar a noção de função de forma precisa vem de uma tradução para o alemão de um artigo de Dirichlet onde aparece:

Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma regra e única lei, nem mesmo que seja representada por uma rela ção expressa por meio de operações matemáticas [1]

A partir dessa formulação muitas tentativas de definir o conceito de função foram feitas, até se chegar no formato que conhecemos hoje, descrito com o uso da teoria de conjuntos (que só come cou a ser formulada por volta de 1880). Conceitos evoluem com o uso e necessidade e, no caso das funções , não é diferente. A definição moderna de função é dada a seguir:

Definição 0.1. *Uma função é (f, A, B) é uma tripla formada pelos conjuntos A - chamado de domínio - e B - conhecido como contradomínio - e pela relação f de tal maneira que a cada $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que $f(a) = b$.*

É muito importante notar que a função não é uma fórmula, mas uma tripla. No cálculo de uma variável, é comum apresentar a fórmula e supor que o conjunto A é o maior subconjunto dos reais para o qual a fórmula faz sentido. **<u>Isso não é aceitável em cálculo de mais de uma variável.</u> O**

[1] Tatiana Roque: História da Matemática, uma visão o crítica, desfazendo mitos e lendas; Ed. Zahar 2012

Domínio sempre deve ser explicitado. Você entenderá as razões nos exemplos. Quanto ao Contradomínio, muitas vezes não é declarado na definição da função por estar sub-entendido pelo domínio e relação . Se não estiver, deve ser explicitado.

Notação / Nomenclatura 1. *Existem muitas possibilidades para denotar uma função em matemática. As mais conhecidas são:* $f(a) = b,\ a \in A,\ b \in B$ *ou:*

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & a & \mapsto & b \end{array}$$

No segundo caso, note que temos uma seta na primeira linha (sem pé) que associa dois conjuntos; na segunda linha temos uma seta (com pé) que associa elementos desses conjuntos.

O Gráfico de uma Função. Um segundo conceito, muito importante, sempre associado ao estudo de funções é o de *gráfico de fc*.

Definição 0.2. *O gráfico de uma função (f,A,B) é o conjunto* $\{(a, f(a)),\ a \in A\}$

`Exercício 1.` *Descreva dois pontos do gráfico de* $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

ATENÇÃO: os pontos do gráfico de $y = x^2$ **têm duas coordenadas.** 0 **não é ponto do gráfico!!!!** $(0, 0)$ **é.**

Leia com cuidado a definição . Convença–se de que *gráfico de função* não é um rabisco ou um desenho: é um conjunto que, eventualmente, pode ser representado por um desenho.

`Exemplo 1.` *Suponha que A é um conjunto formado por 3 pessoas: Paulo, Luis e Carlos,* B_1 *é o conjunto de cores: azul, vermelho, amarelo e* B_2 *o conjunto de calçados sandália, bota, tÃªnis. Denomine por f a função que associa a cada pessoa a cor de sua camisa e seu ssapato. Poderíamos ter, por exemplo f(Paulo) = (amarelo, bota). Teríamos uma função com domínio em A, contradomínio em* $B_1 \times B_2$. *O gráfico de f seria composto d pontos da forma* $(paulo, amarelo, bota)$, $(Luis, vermelho, sandalia)$*,etc. Observe que não faz sentido pensar em desenhar esse gráfico !!! Mas ele existe, porque gráfico é conjunto e não desenho.*

Observação : no exemplo anterior, alguém poderia se sentir tentado a desenhar três eixos, colocar, pontos "Paulo", "Luis"e "Carlos"no primeiro; "azul","vermelho"e "amarelo"no segundo e calçados no terceiro e, nesse sistema de eixos, desenhar o gráfico da função . Todavia, ao fazer isso, estaríamos criando uma representação muito diferente daquela feita no espaço cartesiano. Note que nomes, cores, ou calçados não têm uma ordenação natural. Ninguém diria que "azul $<$ vermelho"ou que sandália é maior (ou menor) que bota; esses conjuntos não têm uma ordenação natural. Por outro lado, os eixos cartesianos pressupoem uma certa ordem entre elementos.

Nesse curso, vamos estudar funções com domínio e contradomínio em espaços $\mathbb{R}^n$.

`Exemplo 2.` *Considere* $F(x,y) + (x-1, 2y, y^2+x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Aqui temos uma função com domínio em* $\mathbb{R}^2$*, contradomínio em* $\mathbb{R}^3$*. Poderia ser representada como:*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & b \end{array}$$

O gráfico de f *é formado por pontos com* 5 *coordenadas; duas para o domínio e três para a imagem. Portanto, o gráfico de* f *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^5$*.Por exemplo,* $(1,2,0,4,5)$ *ou* $(0,3,-1,6,9)$ *são pontos do gráfico de* f*. Observe que o gráfico não pode ser desenhado, pois dependeríamos de* 5 *eixos.*

De um modo geral, estudaremos $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Observe, no exemplo anterior, qua a função F tem duas variáveis, x e y. A imagem de F é formada pela tripla $(x-1, 2y, y^2+x)$. Cada um dos elementos dessa tripla pode ser pensado como uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Essas funções são conhecidas como *funções cooredenadas* de F. No nosso exemplo, $F_1(x,y) = x-1$, $F_2(x,y) = 2y$ e $F_3(x,y) = y^2 + x$ são as funções coordenadas de F.

Problemas para sala de aula

`Exercício 2.` *Em cada uma das funções descritas a seguir, identifique domínio e imagem. Escreva alguns pontos do gráfico, da imagem, e as* *funções coordenadas.*

$$
\begin{array}{ll}
a) & F(x,y) = (x^3 + 2y, sen\ (xy)),\ (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\
b) & F(u,v,w,z) = (uv + we^z),\ (u,v,z,w) \in \mathbb{R}^4 \\
c) & F(x,z) = (x+z, x-z, xz), x \in [-2,2], y \in \mathbb{R} \\
d) & F(x,y,z) = x^2,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3
\end{array}
$$

`Exercício 3.` *Em cada uma das funções descritas a seguir, determine pontos no gráfico e na imagem. Sempre que possível, esboce a imagem e o gráfico.*

$$
\begin{array}{llll}
a) & f(x,y) = 2x + y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 & b) & f(x) = (x, 2x+3),\ x \in \mathbb{R} \\
c) & f(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R} & d) & F(x) = x(1,2,2),\ x \in \mathbb{R} \\
e) & f(x,y) = x^2 + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 & f) & f(x,y) = (x, y, x^2 + y^2) \\
g) & f(x,y) = (x, cos(x), y), (x,y)\mathbb{R}^2 & h) & f(x) = (x, e^x), x \in \mathbb{R} \\
i) & f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} & j) & f(x) = (x^3, e^{x^3}),\ x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

`Exercício 4.` *Seja $\mathcal{I}$, a imagem de $f_1(x) = (x, cos(x))$, $x \in \mathbb{R}$ e G o gráfico de $f(x) = cos(x)$. Considere, ainda, $\mathcal{I}_1$ a imagem de $f_2(x) = (x + 2, cos(x+2))$. Como esses três conjuntos se comparam?*

Você deve ter notado que os conjuntos são iguais. No primeiro e terceiro caso, temos uma cossenÂ´óide descrita como imagem de uma função . Dizemos que a curva estÃ¡ *parametrizada* e que as funções f_1 e f_2 *parametrizam* a curva ou são parametrizações da curva. No segundo caso, a curva é a mesma, mas ela é gráfico de f. Nesse caso, dizemos que a curva está *explicitamente* definida. Observe que existem muitas parametrizações para o mesmo objeto.

`Exercício 5.` *Encontre três parametrizações distintas da reta explicitamente definida por :$y = 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.*

Definição 0.3. *Dizemos que uma função F descreve explicitamente um objeto S de $\mathbb{R}^n$ se S é gráfico de F. Se S for imagem de uma outra função G dizemos que G parametriza S ou, equivalentemente, G é uma parametrização de S.*

`Exercício 6.` *Encontre uma função f que define o plano $3x - 2y + z = 0$ explicitamnte.*

Observe que a função $f(x,y) = (x, y, 2y - 3x)$ parametriza o plano do exercício anterior.

`Exercício 7.` *Mostre que se S é gráfico de duas funções F e G, $F = G$. Em outras palavras, só existe, no máximo, uma forma de definir explicitamente um objeto.*

`Exercício 8.` *encontre uma curva de $\mathbb{R}^2$ que pode ser parametrizada, mas não tem definição explícita.*

`Exercício 9.` *Parametrize o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

`Exercício 10.` *mostre que se S é gráfico de uma função $F(X) = Y$, $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^m$, S pode ser parametrizado.*