Cálculo II - B – prosf: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto
$2^o$ semestre de 2017

# Aula 3 Outros Exemplos

O curso de Cálculo 2B trata de estudar funções , assim como no Cálculo 1. A diferença é que as funções agora terão domínio e Imagem em $\mathbb{R}^n$. Para que esse estudo se torne mais fácil, iniciamos o curso discutindo alguns exemplos, sem muito formalismo. Nas duas primeiras aulas, olhamos para retas e planos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. A razão de iniciarmos com retas e planos é que esses dois objetos podem ser descritos com simplicidade (dependem de funções lineares) e têm uma geometria simples. Na aula de hoje, vamos olhar para alguns outros exemplos, a fim de tornar o raciocínio em $\mathbb{R}^n$ mais natural. A partir da próxima aula, iniciamos a formalização da teoria e poderemos nos referenciar aos exemplos já estudados.

**Algumas Curvas** . Em Cálculo 1A, você estudou o gráfico de várias funções e, de uma forma bastante intuitiva, podemos considerar que esses gráficos são *curvas* no plano. Também estamos acostumados a associar a equação $x^2 + y^2 = 4$, por exemplo, a uma curva(um círculo), mas observe que não há uma função definida nesse caso; apenas uma equação . O conjunto $\{s(1,3,1) + (2,1,2),\ s \in \mathbb{R}\}$ também é considerado uma curva em $\mathbb{R}^3$ (no caso, uma reta)e nesse caso, a curva não está descrita nem como gráfico de uma função nem através de uma equação . Vamos analisar alguns outros exemplos.

`Exercício 1.` *Esboce cada uma das curvas $\gamma$ descritas nos ítens a seguir:*

$a)\gamma := \{(u, sen\ (u)),\ u \in [-\pi, \pi]$ $\quad b)\gamma :=$ *o gráfico de* $f(x) = sen\ x,\ x \in [\pi, \pi]$
$c)\gamma := \{(u + 2, sen\ (u + 2)), u \in \mathbb{R}\}$ $\quad d)\gamma := \{(x, y) tais\ que\ \ x^2 + y^2 = 1$
$e)\gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x^2 + y^2 = 1\}$ $\quad f)\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists\theta /\ x = sen\ (\theta)$ $e\ \ y = cos(\theta)\}$

**Algumas Superfícies** Alguns objetos de $\mathbb{R}^3$ são conhecidos como superfícies. Por exemplo: planos, que discutimos nas aulas anteriores. Vamos olhar mais alguns exemplos de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

`Exercício 2.` *Esboce (ou tente esboçar) cada um dos conjuntos descritos (é importante tentar, você terá a oportunidade de discutir durante a aula):*

$a)\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ $\quad b)\mathcal{S} = \{(x, y, z)\ /x^2 + y^2 = 1\}$
$c)\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /y = x^2\}$ $\quad d)\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /z = x^2 + y^2\}$

**Problemas para sala de aula** É possível que você não tenha completado os exercícios feitos em casa. Nesse momento, discuta com seus colegas e professor cada um dos exemplos. Compare as soluções e esteja certo de que tudo estÃ¡ correto. Além dos exemplos que construímos nos exercício, é importante aqui conseguir diferenciar ”superfície”de ”curva”. Como sabempos se um certo conjunto é superfície ou curva (ou, como criamos uma intuição a esse respeito)? Comece analisando o exemplo seguinte:

`Exemplo 1.` *Se* $A := \{(x, y) \ / \ y = 3x + 2\}$ *e* $B := (x, y, z) \ / \ y = 3x + 2\}$*,* $A$ *é uma reta (portanto, uma curva) e* $B$ *é um plano (portanto, uma superfície).* $A$ *expressão que define os conjuntos,* $y = 3x + 2$*, é exatamente a mesma, entretanto. O que variou? A primeira resposta a essa pergunta, seria: a diferença é que, no primeiro caso queremos um conjunto no plano e, no segundo, um conjuto no espaço.*

A conclusão do exemplo anterior não está muito completa. Analise o exemplo seguinte:

`Exemplo 2.` *Se* $A := \{(x, y) \ / \ y = 3x + 2\}$ *e* $B := (x, y, z) \ / \ y = 3x + 2, \ z = 1\}$*,* $A$ *é uma reta (portanto, uma curva) e* $B$ *também é uma reta (interseção do plano* $z = 1$ *com o plano* $y = 3x = 2$*). Como no exemplo anterior, temos um conjunto no plano, outro no espaço, e ambos são curvas.*

Olhando para a equação $y = 3x + 2$ no plano, vemos que: se escolhermos um valor de $x$, $y$ não pode ser escolhido aleatoriamente (nesse caso, um único valor de $y$ vai satisfazer a equação para o $x$ escolhido. Então, para que a equação seja satisfeita, só temos de liberdade de escolher livremente uma variável. Por outro lado, olhando a equação $y = 3x + 2$ no espaço, se escolhermos $x$, ainda podemos escolher $z$ livremente, e a equação será satisfeita. Observe que, no segundo exemplo, quando escrevemos $z = 1$ voltamos a ter um único sl grau de liberdade e o conjunto $B$ é uma curva.

`Exercício 3.` *Em cada um dos exercícios da fase inicial dessa aula, identifique quantas variáveis podem ser escolhidas aleatóriamente e associe com a ideia de curva ou superfície.*

`Exercício 4.` *Tente esboçar cada um dos conjuntos seguintes. Antes de esboçar, pense com cuidado: em que dimensão você vai trabalhar, e se você* *espera uma curva ou uma superfície.*

$$
\begin{array}{ll}
A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 & A = \{(3cos(\theta) + 2sen\ (\theta)),\ \theta \in [0, 2\pi]\} \\
A = \{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\} & A := \{(u, u+1, u-2),\ u \in \mathbb{R}\} \\
A = \{(u, v, u^2), u, v \in \mathbb{R}\} & A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ /2x + y = 0,\ y - z = 0\}
\end{array}
$$

`Exercício 5.` *Considere os istema de equações :*

$$
\begin{cases} 3x - 2y + z = & 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}
$$

*Vemos um sistema de equações com duas equações e três incógnitas. Procure lembrar o que você aprendeu sobre isso e como isso se relaciona com a aula de hoje.Quantas soluções tem o sistema? Tem solução ? O que isso significa geometricamente?*