Cálculo II - B – prosf: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto
2^o semestre de 2017

Aula 2 O Espaço $\mathbb{R}^n$. (continuação)

O objetivo dessa aula é apresentar as operações de produto escalar e discutir combinações lineares e sua interpretação .

Combinações lineares Na aula passada, trabalhamos com a multiplicação de um vetor fixo por um número real. Concluímos que era possível parametrizar retas multiplicando um vetor determinado por uma variável real e somando algum outro vetor fixo. A pergunta, no momento, é: o que aconteceria se fixássemos dois vetores, X e Y e trabalhássemos com a soma $sX + tY$, s e $t \in \mathbb{R}$?

`Exercício 1.` *Dados* $X = (1, -1)$ *e* $Y = (1, 2)$*, esboce* $Z_1 = 2X + Y$*,* $Z_2 = -X + 2Y$*,* $Z_3 = X - Y$*.*

`Exercício 2.` *Dados* $X = (1, 1, 0)$ *e* $Y = (1, 0, 2)$*, esboce* $Z_1 = 2X + Y$*,* $Z_2 = -X + 2Y$*,* $Z_3 = X - Y$*.*

`Exercício 3.` *Dados* $X = (1, -1)$ *e* $Y = (1, 2)$*, verifique, geometricamente (i. é.: faça o desenho!!!)que existem* a *e* b *de tal maneira que* $(1, 1) = aX + bY$*.Faça uma conta e detrermine* a *e* b*.*

O produto escalar (ou interno) em $\mathbb{R}^n$ O *produto escalar (ou interno)* é uma operação importante entre vetores de $\mathbb{R}^n$. Dados os vetores $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definimos uma operação entre eles, que chamamos de *produto escalar ou interno* como $X.Y = x_1.y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Observe que esta é uma ooperação que associa dois vetores a um número real.

`Exercício 4.` *Calcule o produto escalar entre* $(1, 0, 2, 1)$ *e* $(3, 5, -2, 1)$*.*

Problemas para sala de aula

`Exercício 5.` *Dados* $X = (1, 3)$ *e* $Y = (1, 1)$*, mostre que os vetores* $(2, 1)$*,* $(-1, -1)$*,* $(3, 1)$ *podem ser escritos como* $aX + bY$*.*

`Exercício 6.` *Descreva todos os vetores de* $\mathbb{R}^2$ *que podem ser escritos da forma* $aX + bY$ *onde* X *e* Y *são os mencionados no exercício anterior.*

`Exercício 7.` *Considere todos os pontos contidos na região* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. *Esboce* D. *Raciocine geometricamente e esboce a região* $D_1 = \{2(x,y),\ (x,y) \in D\}$ *e* $D_2 = \{(x,y) + (1,1),\ (x,y) \in D\}$.

`Exercício 8.` *Descreva todos os vetores em* $\mathbb{R}^3$ *que podem ser escritos da forma* $a(1,0,2) + b(0,1,2)$. *Tente entender geometricamente.*

`Exercício 9.` *Descreva todos os vetores em* $\mathbb{R}^3$ *que podem ser escritos da forma* $a(1,0,2) + b(0,1,2) + (1,4,1)$. *Tente entender geometricamente.*

`Exercício 10.` *Dado um vetor* $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *mostre que o "comprimento do vetor", isto é: o comprimento do segmento de reta que une a origem a* X, *pode ser calculado como* $\sqrt{X.X}$, *onde "."é o produto escalar.*

Quando calculamos $\sqrt{X.X}$, $X \in \mathbb{R}^n$ vamos sempre nos referir a este valor como *norma de* X. A norma é sempre identificada com o "comprimento"do vetor, mesmo quando este vetor não pode ser desenhado (nem "medido") por ter mais de 3 coordenadas. A norma de um vetor Xé denotada por: $||X||$.

`Exercício 11.` *Mostre que se* $X \in \mathbb{R}^n$, $\frac{X}{||X||}$ *é um vetor de norma* 1.

O produto escalar tem uma interpretação geométrica muito importante que vamos deduzir agora.

`Exercício 12.` *Mostre que se* X *e* Y *são vetores de* $\mathbb{R}^2$ *e ambos têm norma* 1, $X.Y = cos\theta$ *onde* θ *é o ângulo entre* X *e* Y. *Sugestão: represente os vetores* X *e* Y *da forma* $(sen\ \alpha, \cos\alpha)$; *procure descobrir "quem é"*α.

`Exercício 13.` *Mostre que se* X *e* Y *são elementos de* $\mathbb{R}^2$, $X.Y = ||X||||Y|| \cos(\theta)$, *onde* θ *é o ângulo entre* X *e* Y. *Sugestão. Calcule* $\frac{X}{||X||} \cdot \frac{Y}{||Y||}$ *e use os dois exercícios anteriores.*

A expressão: $X.Y = ||X||||Y|| \cos(\theta)$, é muito importante e muito utilizada.

`Exercício 14.` *Determine todos os vetores* X *de* $\mathbb{R}^2$, *tais que* $X.(2,-1) = 0$. *Faça um esboço desse conjunto.*

`Exercício 15.` *Determine todos os vetores* X *de* $\mathbb{R}^2$, *tais que* $(X-(a,b)).(2,-1) = 0$, *onde* (a,b) *é algum vetor fixo. Faça um esboço desse conjunto.*

Nos exercícios 14 e 15 você desenhou uma reta (assim esperamos). Observe que isso introduz uma maneira "nova"de descrever uma reta no plano. Em Cálculo 1, você trabalhou bastante com retas que eram gráficos de funções . Nesse caso, a reta era descrita como gráfico de $y = ax + b$. Na aula passada, vimos que retas (em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$) podiam ser descritas como $\{sX + B,$ onde $s \in \mathbb{R},$ Xe B são vetores $\}$. Agora temos uma forma um pouco diferente, já que a reta é descrita como uma equação . **Note bem:** $3x + 4y = 0$ **<u>não</u> é uma função ..**

`Exercício 16.` *Determine todos os vetores* $X \in \mathbb{R}^3$ *que satisfazem a equação :* $X.(1, -2, 1) = 0$*. Compare com o exercício 14*

`Exercício 17.` *Determine todos os vetores* $X \in \mathbb{R}^3$ *que satisfazem a equação :*$(X - (a, b, c)).(1, -2, 1) = 0$*. Compare com o exercício 15*

Nos exercícios 8 e 9 você percebeu que era possível descrever um plano em $\mathbb{R}^3$ como um conjunto da forma $sX + tY$, onde Xe Y são vetores de $\mathbb{R}^3$ e se t são números reais que variam. É importante perceber que essa descrição é análoga a de uma reta como sX, $s \in \mathbb{R}$. Em ambos os casos, escolhemos vetores fixos que indicam direção e utilizamos variáveis reais para calcular múltiplos desses vetores. Como no caso das retas, vamos dizer que quando um plano é descrito dessa forma, ele está *parametrizado*, e s e t são ditos *parâmetros*. Um sentido mais preciso para o termo "parametrização "será apresentado mais tarde.

`Exercício 18.` *Procure sistematizar, por escrito, o conteúdo da aula de hoje.*

Exercícios Adicionais

`Exercício 19.` *Considere* Π *o plano parametrizado por* $s(2, 1, 0)+t(3, 1, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$*. Descreva* Π *através de uma equação da forma* $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$*.*

`Exercício 20.` *Com relação ao plano* Π *do exercício anterior, parametrize e descreva com uma equação um plano paralelo a ele, contendo o ponto* $(1, 1, 1)$

`Exercício 21.` *Verifique se a reta* $s(1, 2, 3)$ *esta contida no plano* $3x+2y-1 = 0$*.*

`Exercício 22.` *Vimos que* $X.Y = ||X||||Y||cos(\theta)$, *aonde* θ *é o ângulo entre* X *e* Y. *Se estivermos trabalhando em* $\mathbb{R}^2$ *a ideia de ângulo entre dois vetores, é bastante intuitiva. Em* $\mathbb{R}^3$, *pensamos que os vetores* X *e* Y *definem um plano, e a noção de ângulo fica natural, quando olhamos para aquele plano. Em* $\mathbb{R}^n$, *com* $n > 3$, *a intuição do que seja "ângulo"se perde. Nesse caso, o produto escalar é usado para definir o que será chamado de ângulo. De fato, dados* X *e* Y *em* $\mathbb{R}^n$, *o ângulo* θ *entre eles é definido como:* $arccos(\frac{X.Y}{||X||||Y||})$. *Calcule o ângulo entre* $(1, 2, -1, 2)$ *e* $(0, 3, 2, 1)$.