Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto[1]
2^o semestre de 2017

Aulas 11/12 derivadas de ordem superior/regra da cadeia gradiente e derivada direcional

Derivadas direcionais Dado um ponto X_0 no domínio de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podemos pensar em calcular a a variação de f em alguma direção . Isto é, imagine–se parado em X_0 e suponha que você decida dar um passo na direção de um vetor unitário (norma igual a 1) u. Se o seu passo tem "tamanho"t, a variação será dada por $f(X_0 + tu) - f(X_0)$. O problema com essa expressão é que ela depende do tamanho do passo. Ou seja, passos grandes tendem a indicar uma variação grande e passos pequenos tendem a indicar uma variação próxima de zero se a função for contínua (por quê?). Suponha, entretanto, que você quer responder a seguinte pergunta: *dando passos de tamanhos diferentes em várias direções , em qual delas a variação de f será maior (ou menor)?*. A medida correta para a variação , será então: $\frac{f(X_0+tu)-f(X_0)}{t}$. Se quisermos ter uma noção de como f varia para passos muito pequenos (pequena variação no domínio), chegaremos a expressão:

$$lim_{t\to 0}\frac{f(X_0 + tu) - f(X_0)}{t}$$

e este valor, quando existe, é chamado derivada direcional de f em X_0 na direção de u. A notação mais comum para derivada direcional é $\frac{df}{du}(X_0)$. Formalmente definimos:

Definição 0.1. *Define–se a derivada direcional de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em um ponto X_0 na direção do vetor unitário u como sendo:*

$$\frac{df}{du}(X_0) = lim_{t\to 0}\frac{f(X_0 + tu) - f(X_0)}{t} \tag{1}$$

quando o limite existe e é finito

`Exercício 1.` *Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um ponto X_0, mostre que se u é o vetor cuja i–ésima coordenada vale 1 e as outras valem 0, então $\frac{df}{du}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$.*

[1] o conteúdo dessas aulas foi retirado, quase que integralmente, da apostila escrita em conjunto com Maria Lucia Menezes.

A expressão (1) é pouco operacional e vamos tentar reescrevê–la. Pela definição de derivada, sabemos que se f é diferenciável em X_0 então, para valores pequenos de t escrevemos:

$$f(X_0 + tu) = f(X_0) + \nabla f(X_0).u + resto(tu) \tag{2}$$

Substituindo em (1) temos:

$$\frac{df}{du}(X_0) = lim_{t\to 0}\frac{f(X_0) + \nabla f(X_0).u + resto(tu) - f(X_0)}{t} \tag{3}$$

Segue que:

$$\begin{array}{rcl} \frac{df}{du}(X_0) & = & lim_{t\to 0}\frac{\nabla f(X_0).u + resto(tu)}{t} \\ & = & lim_{t\to 0}\nabla f(X_0).u + lim_{t\to 0}\frac{resto(tu)}{t} = \\ & = & \nabla f(X_0).u \end{array} \tag{4}$$

e concluímos que se f é diferenciável a derivada direcional de f na direção de u é dada por $\nabla f(X_0).u$.

`Exercício 2.` *Para cada uma das funções abaixo, calcule a derivada direcional na direção do vetor v no ponto X_0. (Obs: Lembre -se de calcular o vetor unitário !!!!!)*

$$\begin{array}{llcll} a) & f(x,y,z) & = & (x^2 - 3y + z^3), & X_0 = (1,2,-1), \quad v = (1,1,1) \\ b) & f(x,y) & = & sen(xy^2), & X_0 = (\pi, 3/2), \quad v = (-1,2) \\ c) & f(x,y,z) & = & actg(x - y + z), & X_0 = (3,2,-1), \quad v = (1,0,1) \end{array}$$

Suponha que $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ é uma curva parametrizada no domínio de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. É natural nos perguntarmos qual seria a variação de f ao longo da curva. Como $\gamma'(t)$ é o vetor tangente à curva, em cada ponto, o vetor unitário na direção da curva em cada ponto pode ser tomado como $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ desde que $\gamma'(t) \neq (0,0,0,0,...)$..Neste caso, a variação da função ao longo da curva será dada por $\nabla f(\gamma(t)).\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

`Exercício 3.` *Sejam f e γ como no parágrafo anterior. Observe que a função $f \circ \gamma(t)$ é uma função real, de variável real, que consiste na restrição da função f à curva γ. Calcule a taxa de variação desta função pela regra da cadeia. Compare com a taxa de variação obtida anteriormente.*

Seja f como no exercício anterior e seja $\mathcal{C}$ um conjunto de nível de f. Seja $\gamma(t)$ uma curva contida em $\mathcal{C}$. É claro que $f \circ \gamma(t)$, é função real de variável real. Além disso, $f \circ \gamma(t)$ é uma função constante pois a curva está contida em um conjunto de nível de f. Assim, pela teoria de cálculo de uma variável $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \equiv 0$. Mas $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \equiv 0 \Rightarrow \nabla f.\gamma(t) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} \equiv 0$. Esta equação tem as seguintes interpretações óbvias: primeiro, f não varia na direção de γ o que é natural pois γ está contida em um conjunto de nível de f; segundo, o gradiente de f é ortogonal à γ o que também já sabemos.

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e fixe X_0 no domínio de f. Suponha que $\nabla f(X_0) \neq (0, 0, \cdots 0)$. Seja u um vetor unitário. Sabemos que o produto $\nabla f(X_0).u$ mede a taxa de variação de f na direção de u. Gostaríamos de nos perguntar em que direção esta taxa é máxima. Sabemos que $\nabla f(X_0).u = \|\nabla f\| \|u\| cos\theta$ onde θ é o ângulo formado pelos vetores gradiente e u. A variação será máxima, portanto, quando $\cos(\theta)$ for igual à 1.

`Exercício 4.` *Mostre que o gradiente de uma função aponta no sentido de crescimento máximo da função . Qual o sentido de decrescimento máximo?*

exercícios diversos

`Exercício 5.` *Seja $w = x^2 + y^2 - z^2$ onde $x = \rho sen\varphi cos\theta$, $y = \rho sen\varphi sen\theta$ e $z = \rho cos\varphi$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial w}{\partial \rho}$ e$\frac{\partial w}{\partial \theta}$*

`Exercício 6.` *Sejam $x = 2u + 3v$ e $y = u + e^{4v}$. Considere uma função F de duas variáveis e defina $F(u, v) = f(x, y)$ onde $f(6, 4) = -3$, $f_1(6, 4) = 4$ e $f_2(6, 4) = -5$. Calcule $F_u(3, 0)$ e $F_v(3, 0)$.*

`Exercício 7.` *Seja $H(x, y, z) = \sqrt{L(x, y, z)}$ onde $L(0, 0, 0) = 9$, $L_x(0, 0, 0) = 5$, $L_y(0, 0, 0) = 4$ e $L_z(0, 0, 0) = -3$. Calcule H_x, H_y e H_z em $(0, 0, 0)$.*

`Exercício 8.` *Seja F a função que mede a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^n$. Calcule a derivada de F.*

`Exercício 9.` *Seja $f(x, y, z) = z - e^x sen(y)$ e $P = (ln(3), 3\pi/2, -3)$. Ache: a) $\nabla f(P)$, b) a reta normal à superfície de nível que contém P, c) O plano tangente à esta superfície em P.*

`Exercício 10.` *Uma função $f(x,y)$ é dita harmônica se satisfaz a equação de Laplace: $\Delta f = f_x x + f_y y = 0$. Mostre que as funções a seguir são harmônicas.*

$$\begin{array}{ll} a) & f(x,y) = ln(x^2+y^2) \\ b) & f(x,y) = e^x sen(y) + e^y cos(x) \\ c) & f(x,y) = arctg(y/x) \end{array}$$

`Exercício 11.` *Mostre que $U(x,t) = f(x-at)+g(x+at)$ onde a é constante e f e g são duas vezes diferenciáveis é solução da equação : $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$.*

`Exercício 12.` *Seja $u(x,t)$ uma função que satisfaz o problema:*

$$\begin{cases} u_t + 9u_x = 0 \\ u(x,0) = x^3 + 2 \end{cases}$$

Calcule $u(x,t)$ em um ponto (x,t) qualquer.

`Exercício 13.` *Seja $g(u,v) = f(u+v, uv)$, f diferenciável, $x = u+v$, $y = uv$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)$ e $\frac{\partial g}{\partial u \partial v}(1,1)$, sabendo que: $f_x(2,1) = 3$, $f_y(2,1) = -3$, $f_{xx}(2,1) = 0$, $f_{xy}(2,1) = f_{yx}(2,1) = 1$ $ef_{yy}(2,1) = 2$*

`Exercício 14.` *Verifique se a função $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisfaz a equação de Laplace em 3 dimensões: $\Delta f = f_x x + f_y y + f_z z = 0$.*

`Exercício 15.` *Se a, b, c e k são constantes mostre que $w = (acos(cx) + bsen(cx))e^{-kc^2 t}$ é uma solução da equação do calor: $w_t = kw_{xx}$.*

`Exercício 16.` *Se u e v são funções de x e y e satisfazem as equações de Cauchy–Riemann, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ mostre que $u_x x + u_y y = 0$, se todas as derivadas parciais existirem e forem contínuas.*

`Exercício 17.` *Suponha que $f(x,t)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$ onde $c \neq 0$ é uma constante. Determine constantes m, n, p e q para que $g(u,v) = f(x,t)$ onde $x = mu + nv$ e $t = pu + qv$, satisfaça a equação : $\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial v}$*

`Exercício 18.` *Suponha que $x = u + v^2$, $y = 3u - v^2$, e seja $g(u,v) = f(x,y)$. Calcule $\partial^2 g / \partial v^2(-1,2)$ sabendo que :*

$$\begin{array}{lll} f_x(-1,2) = 1 & f_y(-1,2) = e & \\ f_{xx}(-1,2) = -2 & f_{yy}(-1,2) = 0 & f_{xy}(-1,2) = 3 \\ f_x(-3,7) = 5 & f_y(-3,7) = \pi & \\ f_{xx}(-3,7) = \sqrt{3} & f_{yy}(-3,7) = 4 & f_{x,y}(-3,7) = -1. \end{array}$$

`Exercício 19.` *Pedrinho estudou cuidadosamente uma função* $f(x, y)$ *e concluiu que:*

a) Os conjuntos de nível k *de* f *são os círculos* $x^2 + y^2 = k$*;*

b) $\nabla f(1, 0) = (-2, 0)$

Critique as conclusões de Pedrinho.

`Exercício 20.` *Pedrinho reestudou a função e concluiu:*

a) Os conjuntos de nível k *de* f *são os círculos* $x^2 + y^2 = k$*;*

b) $\nabla f(1, 0) = (2, 3)$

Será que Pedrinho ten razão?

`Exercício 21.` *Considere* $z = z(x, y)$, $x = e^u cos(v)$ *e* $y = e^u sen(v)$*. Suponha que* $\nabla z = 0$*. Calcule* $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$

`Exercício 22.` *Sendo* $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$*, calcule a derivada direcional de* f *no ponto* $(1, 2, 1)$ *na direção de* $u = (4, -2, 4)$*.*

`Exercício 23.` *Uma função diferenciável* $f(x, y)$ *tem no ponto* $(1, 1)$ *derivada direcional igual a* 3 *na direção do vetor* $(3, 4)$ *e igual a* -1 *na direção de* $(4, -3)$*. Calcule* $\nabla f(1, 1)$*.*

`Exercício 24.` *Pedrinho fez as afirmações a seguir. Critique.*

- *A derivada de uma função é sempre tangente à função .*
- *Se uma função parametriza uma curva então* $\nabla \gamma$ *é normal à curva.*
- *O plano tangente ao gráfico de uma* fc *é gerado pelas colunas de* Df*.*
- *Se* $\mathcal{C}$ *é conjunto de nível de* f *então em todo ponto de* $\mathcal{C}$ *a derivada de* f *é tangente.*
- *As derivadas parciais de* f *sempre medem a direção da reta tangente ao gráfico de* f*.*
- *Sejam* S_1 *e* S_2 *superfícies de nível de, respectivamente,* $f_1(x, y, z)$ *e* $f_2(x, y, z)$*. Suponha que* $S_1 \cap S_2$*, define uma curva. Então* ∇f_1 *e* ∇f_2 *são tangentes à curva em cada ponto.*

- *Considere duas superfícies como no ítem anterior.* $\nabla f_1 \times \nabla f_2$ *é tangente ‘a curva.*

- *Se* f *tem derivada direcional em qualquer direção , então* f *é diferenciável.*

- *Seja* S *o gráfico de uma função* $z = f(x, y)$*. Fixe* X_0 *em* S*. O vetor* $(f_x, f_y)(X_0)$ *é tangente a alguma curva contida em* S*.*

- *Existe uma transformação linear* $T : U \to V$*, onde* U *e* V *são espaços vetoriais de dimensão finita tal que* T *não é diferenciável na origem.*

- *Se* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *são transformações lineares cuja matriz na base canônica é dada respectivamente por* $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ *e* $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$*, a derivada de* $T \circ L$ *é* $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}.\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ *onde ”.”denota o produto usual de matrizes.*