Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto

2^o semestre de 2017

Aulas 10 – A Regra da Cadeia

A regra da cadeia - forma matricial O enunciado da Regra da cadeia não difere do estudado em cálculo de uma variável. O cuidado adicional deve ser com a ordem da multiplicação , uma vez que será necessário multiplicar matrizes.

Teorema 0.1. *Sejam $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, se G é diferenciável em X_0 e F é diferenciável em $Y_0 = G(X_0)$, então $D(F \circ G)(X_0) = DF(Y_0).G(X_0)$ onde "."denota o produto usual de matrizes.*

A regra da cadeia, enunciada acima, é o teorema básico. Muitas vezes, entretanto, não há interesse em calcuar a derivada da função , mas apenas alguma(s) da(s) derivada(s) parciais. Nesse caso, pode ser mais prático usar algum algoritmo que funcionará como caso particular da Regra da Cadeia. O livro do Stweart apresenta alguns desses algoritmos e discutiremos esse assunto em sala de aula.

`Exercício 1.` *No enunciado da regra da cadeia, quantas linhas e quantas colunas tem cada um das matrizes $DF(Y_0)$ e $DG(X_0)$? Quantas linhas e quantas colunas tem o seu produto? De acordo com as dimensões do domínio e Imagem da função $F \circ G$, quantas linhas e quantas colunas deveria ter sua derivada ?*

`Exercício 2.` *$F(x,y)$, $G(x,y)$ e $H(x,y)$ são funções diferenciáveis em todo seu domínio, com imagem em $\mathbb{R}^2$. Sabe–se que:*

$$
\begin{array}{llll}
F(0,0) = (-1, 2e) & F(1,2) = (3,3) & F(3,-1) = ((0,0) & F(3,\pi) = (2,2) \\
G(0,0) = (\pi, 2) & G(1,2) = (3,-1) & G(3,-1) = (4,e) & G(\pi,2) = (0,0) \\
H(0,0) = (1,2) & H(1,2) = (\sqrt{2}, 0) & H(3,-1) = (4,\sqrt{3}) & H(3,3) = (1,1)
\end{array}
$$

Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabe-se que: $DF(0,0) = A$, $DF(4,\sqrt{3}) = (B + A)$, $DF(3,-1) = B + C$, $DG(3,\pi) = 2B + A$, $DG(0,0) = 3A$, $DG(1,2) = 2C$, $DG(3,-1) = B - 2C$, $DG(\pi,2) = B - C$, $DH(0,0) = A + C$, $DH(1,2) = (B + 2A)$, $DH(3,-1) = 3A + C$, $DH(3,3) = B$. Calcule $D(F \circ H \circ G)(1,2)$.

O vetor gradiente Considere uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A derivada de F será a matriz de uma linha $DF(X) = (\partial \frac{\partial F}{\partial x_1} \partial \frac{\partial F}{\partial x_2} \ \ldots \partial \frac{\partial F}{\partial x_n}$. Olhando para essa linha como vetor, temos uma grandeza conhecida como *vetor gradiente de* F, normalmente denotado por ∇F. Por exemplo, se $F(x, y) = x^3y^2$, $\nabla F(x, y) = 3x^2y^2, 2x^3y^2)$. O vetor gradiente tem propriedades muito importantes, que discutiremos nos exercícios.

Problemas para sala de aula

`Exercício 3.` *Considere as funções* $f(x, y) = (xy, x^2+y, x-y)$ *e* $g(u, v, w) = 2wln(uv)$. *Seja* $h(s)$, $s \in \mathbb{R}$, *uma função cuja imagem é um subconjunto dos reais. Considere* $H(x, y) = h \circ g \circ f(x, y)$.

- *Para que valor(es) de* s *se deve conhecer* $h'(s)$ *para que se possa calcular* $\partial H/\partial x(1, 3)$ *?*

- *Supondo que tal valor é 5, calcule* $\partial H/\partial x(1, 3)$.

`Exercício 4.` *Sejam* $f(x, y) = e^{xy}$, $g(t) = cos(t)$, $h(t) = sen(t)$. *Defina* $f(t) = f(g, h)$. *Calcule* $f'(0)$.

`Exercício 5.` *Sejam* g *e* h *funções diferenciáveis e defina:* $f(r, s) = (g(r, s))^{h(r,s)}$. *Assuma que* $g(1, 2) = 2$, $h(1, 2) = -2$, $g_r(1, 2) = -1$, $g_s(1, 2) = 3$, $h_1(1, 2) = 5$ *e* $h_2(1, 2) = 0$. *Encontre* f_r *e* f_s *no ponto* $(1, 2)$.

`Exercício 6.` *Seja* $w = \int_x^y e^{t^2} dt$ *e suponha que* $x = rs^4$ *e* $y = r^4s$. *Calcule* $\frac{\partial w}{\partial r}$ *e* $\frac{\partial w}{\partial r}$.

Suponha que f é uma função com domínio em $\mathbb{R}^n$ e imagem em $\mathbb{R}$ e seja $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ uma curva contida no conjunto de nível k de f. Fixe $X_0 = \gamma(t_0)$ um ponto em $\gamma(t)$. A função $g(t) = f \circ \gamma(t)$ é uma função real de uma variável e é constante, igual a k, pois $\gamma(t)$ está contida no conjunto de nível k de f. Concluímos então que $g'(t) \equiv 0$ e em particular, $g'(t_0) = 0$. Pela regra da cadeia, podemos escrever:

$$g'(t_0) = \nabla f(X_0).\gamma'(t_0) \tag{1}$$

e portanto, $\nabla f(X_0).\gamma'(t_0) = 0$. Se $\nabla f(X_0) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ então $\nabla f(X_0)$ é ortogonal à $\gamma'(t_0)$. Já vimos que $\gamma'(t_0)$ é tangente à curva $\gamma(t)$ em $\gamma(t_0)$ e como γ é uma curva qualquer em um conjunto de nível de f, concluímos: **O vetor gradiente é normal aos conjuntos de nível.**

`Exercício 7.` *Marcelinho, amigo intelectual de Pedrinho, achou a conclusão acima mal formulada. Fez as seguintes perguntas:*

- *O que quer dizer que "um vetor é normal à um conjunto"? De fato, sei o que quer dizer um vetor ser normal à outro vetor ...*
- *O que quer dizer um "vetor ser normal* aos , conjuntos "? É ortogonal a vários conjuntos ao mesmo tempo ?

Responda cuidadosamente às perguntas de Marcelinho.

`Exercício 8.` *Obtenha a equação do plano tangente à superfície* $z cos(x) - y \exp xyz = 1$ *em no ponto* $(2\pi, 1, 0)$.

`Exercício 9.` *Duas superfícies,* S_1 *e* S_2 *se tam ao longo de uma curva diferenciável* γ. S_1 *é gráfico de uma função* $z = f(x, y)$ *e* S_2 *é conjunto de nível* 3 *de* $h(x, y, z)$. *Para um ponto genérico* $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \gamma$, *obtenha a equação da reta tangente à curva, em função das derivadas parciais de* f *e* h.

Suponha que S é uma superfície definida explicitamente por $z = f(x, y)$ e que f é diferenciável. A função $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ define S implicitamente. Assim concluímos que ∇g é normal à S. Mas $\nabla g = (-f_x, -f_y, 1)$ e concluímos que o vetor normal ao gráfico de f é dado por $(-f_x, -f_y, 1)$. Observe que esta conclusão não é nova. Quando estudamos derivadas parciais já tínhamos chegado a este mesmo resultado.

`Exercício 10.` *As curvas definidas a seguir se interceptam no ponto* $(2\pi, \pi)$, *formando um ângulo de* $\pi/2$.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \{(x, y) tais\ que\ xy - sen(x - 2y) = 2\pi^2\} \\ \gamma_2 &:= \{(x, y) tais\ quey = f(x)\} \end{aligned}$$

Encontre um valor possível para $f'(\pi)$.
Quantas soluções você encontra para este problema ?
Resolva o mesmo problema supondo que o ângulo é $\pi/6$.

`Exercício 11.` *Seja* $f(x, y, z)$ *uma função cujo gradiente é dado em todos os pontos por:* $\nabla f(x, y, z) = (1, 2, 3)$. *Esboce os conjuntos de nível de* f.